MATHÉMATHIQUES

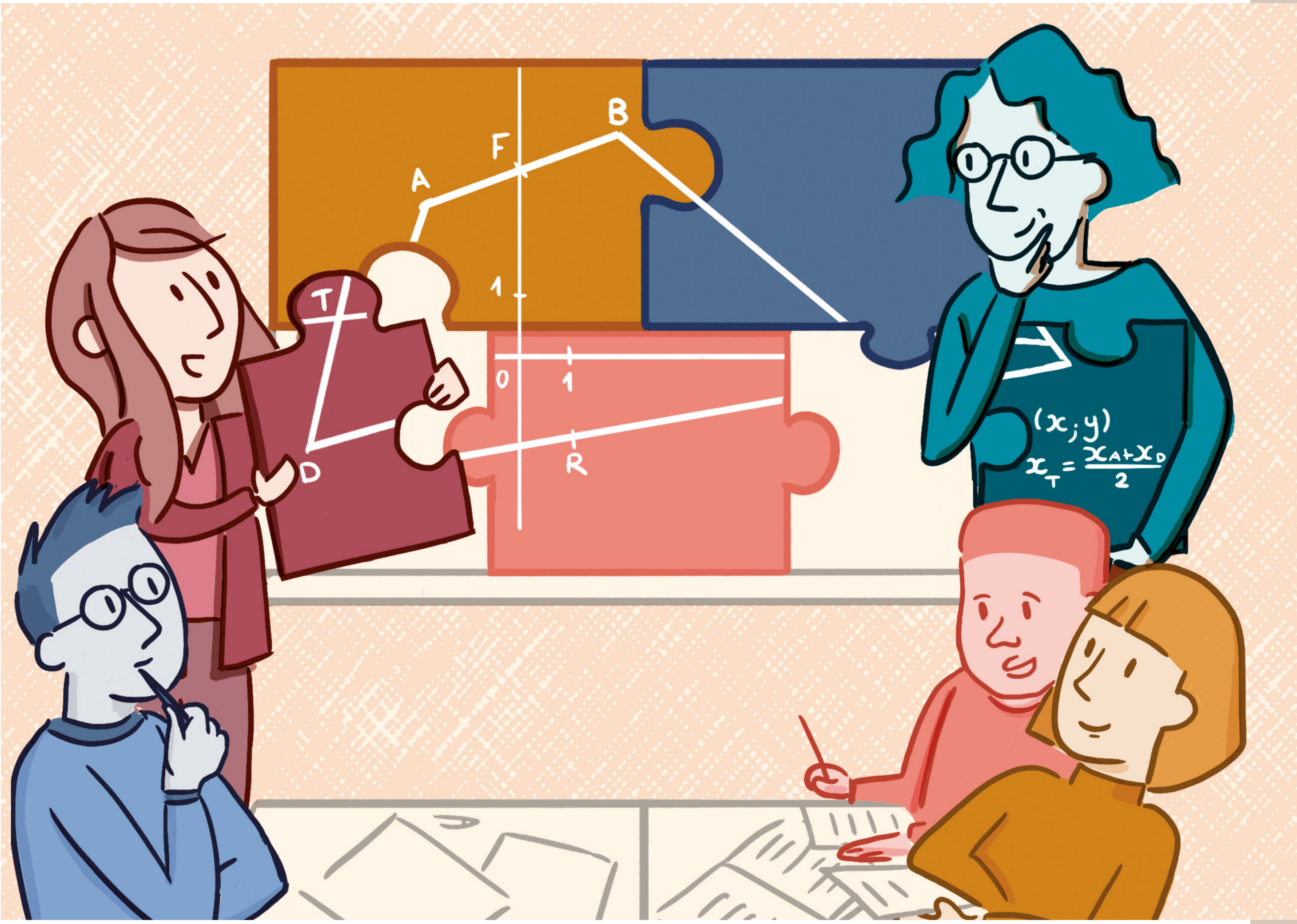
SECONDE

NOUVEAUX PROGRAMMES 2019

DES MATHS ENSEMBLE ET POUR CHACUN

Seconde

JEAN-PHILIPPE ROUQUÈS
LAETITIA VALADE
CHRISTOPHE GRAGNIC



CONTENUS COMPLÉMENTAIRES EN LIGNE

CANOPÉ ÉDITIONS
AGIR

DES MATHS ENSEMBLE ET POUR CHACUN

MATHÉMATHIQUES

SECONDE

NOUVEAUX PROGRAMMES 2019

Seconde

Jean-Philippe Rouquès

Laetitia Valade

Christophe Gragnic

CANOPÉ ÉDITIONS

AGIR

Directeur de publication
Jean-Marie Panazol
Directrice de l'édition transmédia
Stéphanie Laforge
Direction artistique
Samuel Baluret
Gaëlle Huber
Coordination éditoriale
Christine Bonfiglioli
Secrétariat d'édition
Julie Lavalard
François Fièvre
Référente pédagogique
Isabelle Renault
Mise en pages
Athina Vamvassaki
Isabelle Guicheteau
Conception graphique
Gaëlle Huber
Isabelle Guicheteau

Couverture
Athina Vamvassaki

Toutes les productions d'élèves reproduites dans cet ouvrage sont l'œuvre d'élèves de seconde. Les graphiques, figures et schémas ont été réalisés par les auteurs et les testeurs des séquences grâce aux logiciels GeoGebra, Sine Qua Non, Draw.io et LibreOffice.

ISSN : 2425-9861
ISBN : 978-2-240-04443-3

(établissement public à caractère administratif)
Téléport 1 – Bât. @ 4
1, avenue du Futuroscope
CS 80158
86961 Futuroscope Cedex

Remerciements
Driss Badaoui
Christophe Besson
Véronique Bluteau-Davy
Gaëlle Bonjean Le Béchec
Thierry Bonjean
Anne Boyé
Christophe Capdevielle
Lionel Charlot
Mathilde Chauveau
Élisa Civel
Rachel Delavaud
Florence Espinosa
Swanny Fouchard
Fabrice Foucher
Sylvie Grau
Catherine Houdement
Michel Jaffrot
Christian Judas
Damien Lecan
Carlos Moraga Ferrándiz
Nour-Eddine Mouktadi-Billah
Françoise Munck
Sylvain Petit
Nicolas Raimbaud
Pascale Rey du Boissieu
Françoise Robert
Hélène Staïner
Ghislain Terrien
Pierrick Vairé
Pierre Valade

Sommaire

2. NOS SÉQUENCES

CONTENUS COMPLÉMENTAIRES EN LIGNE

Accédez aux contenus en ligne en suivant les étapes présentées en fin d'ouvrage

Introduction

L'aventure continue

En mai 2006, Hélène Staïner, professeure expérimentée de collège, accueille dans sa classe Jean-Philippe Rouquès, qui débute en collège. Ils écriront les volumes de 4^{e} et de 5^{e} de *Des maths ensemble et pour chacun* en 2009 et 2010. En 2014, rejoints par Gaëlle Bonjean Le Béchec, ils publient le volume de 6^{e}. L'année suivante, épaulé au démarrage par Thierry Bonjean, Jean-Philippe prend en charge des classes de lycée et réfléchit au volume de 2de. Un an plus tard, il rencontre Lætitia Valade qui a suivi les formations d'Hélène à l'IUFM d'Angers en 2000-2001. Un travail commun se met en place. Un an après, l'équipe s'agrandit avec la venue de Christophe Gragnic, inventeur, entre autres, du Club des expressions (http://expressions.club). Et enfin, plus récemment, les trois auteurs ont eu la chance de bénéficier de l'aide précieuse et abondante d'Anne Boyé, historienne des mathématiques. Ce volume est le fruit de cinq années de travail.

Différenciation et développement des compétences mathématiques du lycée

À l'heure où les enseignants doivent s'attacher à ce que tous leurs élèves consolident le socle commun de connaissances et développent les compétences mathématiques du lycée, ce livre propose une manière de faire. La pratique décrite facilite la différenciation dans des formes variées. Différencier ne signifie pas seulement donner des exercices différents à des élèves différents, même si cela se produit de temps en temps dans cette pratique. La différenciation consiste avant tout à trouver une organisation qui permette à chacun de progresser :

- poser des questions ouvertes dont l'élève peut s'emparer quelles que soient ses compétences initiales ;
- proposer des temps de concertation en groupe auxquels tous peuvent participer ;
- organiser en classe entière l'examen des réponses individuelles ou collectives de chacun plutôt que de corriger ;
- se demander systématiquement quand on prépare un exercice à la maison : « Que pourra faire un élève en difficulté ? Un élève très à l'aise aura-t-il matière à réflexion ? »

Cette pratique fait également toute sa place à l'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, ainsi qu'au développement de compétences transversales : autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur…

Contenu du livre, mode d'emploi

Ce livre invite le lecteur dans les classes et les arrière-cuisines des auteurs qui, soucieux d'enrichir l'éventail des ressources en 2de, ont souhaité décrire leur pratique dans le moindre petit geste de leur quotidien. Le lecteur pourra choisir son degré d'appropriation : picorer quelques idées ici ou là, garder seulement quelques grandes lignes ou encore utiliser l'ensemble du livre.

La première partie du livre est consacrée à la description générale de cette pratique : préparation des séquences, des séances, mise en place du travail en équipes, utilisation des cahiers,

etc. Ce livre se limite à la formation et ne traite pas de l'évaluation sommative. Les textes en couleur et en retrait par rapport au texte courant sont destinés à aider le lecteur dans ses expérimentations : on pourra y trouver un signalement des difficultés rencontrées pour mettre en œuvre tel aspect de la pratique, des conseils pour éviter de reproduire certaines erreurs, etc.
La seconde partie du livre couvre une large partie du programme 2019 au moyen de seize séquences décrites de façon très détaillée. Le déroulement des séances dépendant beaucoup de la réaction des élèves, il est impossible de le décrire en envisageant tous les cas de figure. Les auteurs ont donc décidé de raconter un déroulement possible parmi d'autres. Le lecteur qui souhaite tester les propositions devra adapter son travail à ses élèves, allant ponctuellement plus loin avec telle classe de bon niveau, choisissant des protocoles plus simples à mener avec telle autre.
Les deux parties s'illustrent mutuellement. Il est donc fortement déconseillé de tester les séquences sans avoir, pour le moins, parcouru la première partie.
Les séquences sont regroupées par thèmes : statistiques, probabilités, géométrie, calcul littéral, algorithmique et programmation, fonctions. Elles ne couvrent pas entièrement le programme mais les auteurs ne considèrent pas pour autant que les sujets non abordés ou peu abordés, notamment les vecteurs, sont moins importants. Les quatre dernières sections sont introduites par un texte qui présente les partis pris qui influencent la progression annuelle et le choix des exercices et du vocabulaire utilisé avec les élèves. La lecture de ces textes, en particulier ce qui concerne les deux types de géométrie plane et les deux types de fonctions, est indispensable à la bonne compréhension de la démarche des auteurs. Le Club des expressions est présenté au début de la section « Calcul littéral » ; ce système informatique est utilisé régulièrement par les élèves pour consolider leur compréhension des expressions mathématiques.
Le mode d'emploi qui figure au début de la seconde partie (p. 52) contient des informations importantes sur la signification des couleurs et des logos présents dans les séquences. On y trouve également quelques précisions sur les temps indicatifs, les exercices, etc.
Sur l'espace en ligne associé à ce livre (voir encart « Accès aux contenus en ligne » en dernière page de cet ouvrage), le lecteur trouvera des documents facilitant la mise en œuvre des séquences : énoncés des exercices proposés et d'exercices supplémentaires pour les rapides, bilans dactylographiés, résumés des séquences, fichiers à projeter en classe (animations géométriques, programmes Python, diaporamas, feuilles de calcul faites avec un tableur…).

PARTI PRIS DE RÉDACTION

Souhaitant partager leur pratique et non pas se poser en modèle, les auteurs décrivent ce qu'ils font à la première personne du pluriel (« Nous disons… ») et non à l'infinitif (« Dire… ») qui est beaucoup plus injonctif.
Comme toute pratique, celle des auteurs est en évolution permanente. Leur parti pris a été d'en faire une photo à un instant *t*, avec les limites que cela suppose. Ni les séquences décrites ni le reste ne sont gravés dans le marbre ; il s'agit avant tout de permettre au lecteur de réfléchir au métier.

AVERTISSEMENT

Les séquences de ce livre ont été écrites entre 2014 et 2019 et testées par une équipe de dix professeurs en 2018-2019. Les changements de programme pour la rentrée 2019 n'ayant été confirmés qu'en janvier 2019, quelques passages des séquences sont très jeunes et ont été peu testés.
Le changement de programme a eu une autre conséquence : l'impossibilité pour les auteurs et les testeurs de vérifier que si l'on fait toutes les séquences du livre, il reste assez de temps pour le reste. Il est donc possible que l'ensemble des séquences proposées soit trop déployé, et le lecteur devra donc envisager de les réduire pour être certain d'aborder tous les points du programme dans de bonnes conditions.

NOTRE PRATIQUE

CHAPITRE 1

Principes de référence

Certains passages de textes officiels[1] sont pour nous de véritables repères. En essayant d'appliquer au quotidien les principes qui y figurent, nous construisons progressivement notre pratique. Bien sûr, ce n'est pas toujours facile : adhérer à ces principes est une chose, les mettre en œuvre au quotidien en est une autre, nettement plus délicate. Par exemple, bien que nous disions souvent que « nous partons du principe qu'ils (les élèves) sont intelligents, qu'ils ont bon esprit et que *tous* peuvent faire des mathématiques » et que nous essayions toujours de nous conduire en conséquence, certains élèves, en rupture scolaire ou familiale, nous poussent parfois dans nos retranchements. Quand nous analysons a posteriori certaines de nos réactions, il nous faut parfois admettre que nous avons un peu oublié tel ou tel principe, mais nous essayons de ne pas en prendre l'habitude car les principes s'affaiblissent vite quand on les transgresse. Quand nous le faisons, nous avons l'impression que c'est pour une bonne cause ou que c'est une situation exceptionnelle. Mais nous croyons qu'il vaut mieux s'efforcer de toujours respecter ces principes, quitte à être un peu en difficulté dans une activité, car ce sont eux qui donnent du sens à l'ensemble de notre pratique. Dans le développement qui suit, nous tentons de décrire comment nous nous sommes appropriés les principes portés par ces textes.

« Développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques. »

Nous partons du principe que les élèves sont intelligents, qu'ils ont bon esprit et que *tous* peuvent faire des mathématiques. Nous faisons ce pari et nous nous conduisons en conséquence ; l'expérience montre qu'alors, quand ils ont pu suffisamment expérimenter l'impact d'un regard de considération positive, de nombreux élèves en difficulté reprennent confiance, de nombreux élèves perturbateurs changent d'attitude.

Nous faisons confiance aux élèves a priori et évitons les procès de mauvaises intentions. Nous les écoutons, nous évitons les remédiations en public qui pourraient les mettre mal à l'aise, nous bannissons les moqueries.

1 Arrêté du 1er juillet 2013 – *BO* nº 30 du 25 juillet 2013 : Référentiels des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation ; *BO de l'Éducation nationale* spécial nº 1 du 22 janvier 2019 : Programme de seconde de mathématiques de seconde générale et technologique ; Éduscol, Ressources pour le lycée général et technologique, novembre 2013 : Les compétences mathématiques au lycée.

Nous essayons d'exercer auprès d'eux une *autorité bienveillante* : nous aimons cette expression. Nous sommes vigilants sur la correction de nos propos, même lorsque nous sommes en colère. Nous leur demandons de nous excuser si nous pensons avoir dérapé.

« Favoriser la participation et l'implication de tous les élèves et créer une dynamique d'échanges et de collaboration entre pairs. »

Nous organisons l'apprentissage autour de l'activité des élèves sous toutes ses formes : leurs manipulations, leurs expérimentations, leur parole, leurs échanges entre eux, leurs écrits individuels ou collectifs. Les productions orales ou écrites des élèves, avec leurs erreurs, sont de véritables objets d'étude pour la classe.
La formalisation d'un savoir ne se fait que très tardivement après le début de son élaboration, pour laisser une véritable place à la participation et à l'implication de l'élève dans la construction préalable du sens.
Tout cela n'est possible que parce que nous acceptons de réduire notre propre temps de parole. Pour autant, les interventions magistrales ne disparaissent pas de notre pratique. Elles sont des outils très précieux dans des circonstances précises : pour faire un rappel rapide, donner un conseil ou une piste à explorer, recadrer la classe après un travail individuel ou en équipes, clore par une parole institutionnelle…
Nous tenons compte des projets personnels des élèves (études longues ou courtes, scientifiques ou non) et de leurs conséquences dans leur implication en classe pour les accompagner au quotidien.

« Accompagner les élèves dans la prise de responsabilités. »

Nous essayons de responsabiliser progressivement les élèves en leur laissant prendre des initiatives et des décisions, en leur permettant d'opérer des choix sur ce qu'ils feront comme travail à la maison, en leur donnant la parole, en leur demandant leur avis, en les autorisant à se déplacer dans la classe si cela favorise leur travail.
Nous les informons à tout moment de ce qui se joue dans la classe : ce qu'on est en train d'apprendre, pourquoi tel camarade a un travail différent à faire, pourquoi nous agissons de telle ou telle façon…

« Développer le goût des mathématiques. »

Nous nous appuyons sur le plaisir, l'intérêt et la réussite comme moteurs de l'apprentissage. Apprendre nécessite des efforts, des prises de risque, du travail. L'élève s'engagera plus volontiers dans cette voie s'il a du plaisir en classe, de l'intérêt pour ce qui est proposé, s'il peut mesurer ses progrès et ses réussites. Le choix de nos exercices, de leur habillage, de leur mise en œuvre tient compte tout particulièrement de ce qui peut intéresser les élèves et leur plaire : en ce sens, les jeux et les défis sont des outils précieux. L'organisation en équipes, propre à créer de la convivialité, est aussi une source de bien-être pour les élèves. De plus, notre volonté de proposer en début d'année des travaux susceptibles de les mettre tous en réussite vise à leur faire goûter le plaisir d'apprendre.

« La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs [des] compétences [mathématiques] du lycée. »

Parce que c'est le propre de l'activité mathématique, nous confrontons les élèves chaque jour à des problèmes. Les questions soulevées sont souvent largement ouvertes tout en restant accessibles à tous. La résolution de problèmes donne du sens aux apprentissages, favorise la mise en activité des élèves, développe leurs capacités de réflexion et leur goût pour les mathématiques. En outre, c'est aussi un moyen de développer les six compétences du lycée : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer.

« Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques. »

Qu'il s'agisse, entre autres, d'échanger en équipes sur ce qui a été fait pendant un travail à la maison, de proposer en plénière des premières pistes ou des méthodes de résolution puis d'en débattre, l'oral occupe beaucoup de place dans notre pratique.
Au cours d'une plénière de synthèse, nous sollicitons sans cesse la parole de l'élève : donner son avis sur l'intervention d'un camarade, la reformuler à sa façon, résumer l'état de la réflexion collective, formuler ce qui pourrait être écrit en bilan… Ce travail oral rapproche progressivement les productions individuelles ou collectives des objectifs d'apprentissage.
L'oral constituant un véritable enjeu d'apprentissage, nous faisons en sorte que tous s'expriment. Nous évitons de reprendre trop tôt les élèves quant à la correction de leur expression. Le temps des reformulations, de la correction de la langue et du langage mathématique viendra ensuite, puis ce sera celui de la rédaction que nous prenons bien soin de dissocier du temps de la résolution du problème.

« L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe. »

La plupart des notions que les élèves découvrent le sont à travers des exercices de recherche. Pour favoriser l'acquisition du sens par les élèves, nous ne faisons jamais l'économie du temps dont l'élève a besoin pour s'engager dans une activité de recherche, faire ses premiers essais personnels, analyser des erreurs. Nous sommes persuadés qu'il est illusoire de compenser des difficultés de compréhension en début d'apprentissage par un entraînement technique final plus long. Au contraire, nous observons qu'un investissement en temps plus important en début d'apprentissage permet de réduire le temps passé à l'acquisition des techniques.
Les aides ou les remédiations que nous proposons aux élèves en difficulté font donc à nouveau appel à des situations qui donnent du sens, dans lesquelles ils vont mesurer l'utilité des nouveaux savoirs ou savoir-faire, pas à un entraînement technique supplémentaire.

« L'élève doit disposer d'automatismes. »

L'acquisition des automatismes tient une grande place dans notre pratique, d'abord lors des premières utilisations d'une technique puis lors des entraînements techniques menés en classe (questions flash) ou à la maison. Ces entraînements s'étalent sur une durée importante dans le but d'installer durablement le savoir visé.
Nous essayons d'expliquer aux élèves l'intérêt d'être techniquement performants et d'avoir des automatismes. Par exemple, chaque fois que l'occasion se présente, nous les aidons à identifier que la cause de leur embarras au cours d'une résolution de problème est une insuffisance technique alors que la piste de travail est tout à fait satisfaisante. Aux yeux des élèves, ce genre d'événement donne une légitimité aux entraînements techniques que nous organisons. Il peut même nous arriver d'interrompre une résolution de problème dans laquelle les élèves rencontrent un obstacle technique pour y revenir après un entraînement. La motivation des élèves au cours de cet entraînement technique est alors souvent accrue par l'envie de revenir rapidement au problème initial.

« Tout apprentissage se réalise dans la durée, dans les activités variées et toute acquisition doit être reprise, consolidée et enrichie[2]. »

Notre organisation des apprentissages dans l'année a pour objectif de donner du temps à l'élève pour assimiler les nouveautés et s'entraîner. Un apprentissage se prépare à l'avance, se développe dans la durée, se consolide au fil du temps, s'approfondit progressivement, est

2 Contrairement à nos autres principes de référence, celui-là ne figure dans aucun texte officiel récent mais il reste d'actualité pour nous.

évalué lors de plusieurs évaluations étalées sur l'année. Notre progression annuelle un peu complexe demande de l'organisation : c'est le prix que nous acceptons de payer pour que tout apprentissage se réalise dans la durée. Dans notre pratique, il n'y a pas de point final pour un apprentissage.

« Différencier son enseignement en fonction des rythmes d'apprentissage et des besoins de chacun. »

La différenciation est pour nous une préoccupation quotidienne. Permettre à chaque élève de s'emparer à sa façon des problèmes et d'essayer d'abord des procédures personnelles est la première forme de différenciation dans nos classes.
Les échanges en petits groupes et les débats en plénière sont aussi porteurs de différenciation puisque les productions individuelles ont l'occasion d'y être étudiées, critiquées, améliorées : chacun peut avancer sur son propre chemin en prenant appui sur son équipe de travail ou sur le groupe-classe.
En outre, l'organisation de la classe en équipes nous permet des regroupements ponctuels d'élèves en fonction de leurs besoins : c'est alors l'occasion de donner des travaux différents adaptés à chacun, notamment des exercices supplémentaires pour les rapides.
Nous n'hésitons pas non plus à différencier le travail fait à la maison sur feuille. Pour les devoirs classiques, si possible, nous ajoutons sur l'énoncé des indications de niveau des exercices et laissons les élèves choisir les exercices traités. Pour certains entraînements techniques à la maison, une feuille A3 avec les énoncés et les calculs des élèves fait plusieurs allers-retours entre eux et nous ; lorsqu'une question est ratée, nous la donnons à refaire (accompagnée d'une aide) si bien que chacun avance à son rythme.
Dans tous les cas, pour éviter certains effets pervers dans les relations entre les élèves, nous leur expliquons nos pratiques de différenciation et leur intérêt pour *tous*.

« En situation d'apprentissage, repérer les difficultés des élèves. »

Notre pratique nous donne des occasions quotidiennes d'observer de façon précise les élèves, de les écouter, que ce soit en travail individuel, en équipes ou en plénière. L'étude de leurs productions, que nous mettons au cœur des débats en plénière, nous fournit beaucoup de renseignements sur l'état de leurs connaissances. Ces prises d'informations multiformes sont autant d'indicateurs d'évaluation qui nous permettent de prendre les décisions propres à piloter la classe : peut-on poursuivre ? Faut-il travailler sur telle erreur ? Peut-on commencer quelque chose de nouveau ? Etc. Nous complétons l'observation des élèves et de leurs productions orales ou écrites par de fréquents sondages à main levée ou avec des logiciels spéciaux : « Qui a réussi ? » ; « Qui a trouvé 12 ? » ; « Qui a moins de deux erreurs ? »… Nous essayons d'instaurer une confiance suffisante pour que les élèves ne trichent pas et que les sondages soient efficaces. Pour cela, nous leur expliquons le rôle de ce type d'évaluation.

« Préparer les élèves à l'exercice d'une citoyenneté pleine et entière [et] développer l'autonomie, la prise d'initiative, […] la créativité. »

La classe de mathématiques est un espace tout à fait propice à cela. Des exemples dans notre pratique :
- permettre à l'élève de construire ses propres questions sur une situation donnée ou de l'explorer d'abord à sa façon, c'est lui permettre de se risquer aux initiatives, en confiance, dans l'espace protégé de la classe ;
- apprendre à l'élève à construire ses propres outils de contrôle, c'est lui permettre un pas vers plus d'autonomie (une question importante dans la classe : « Comment sait-on que c'est faux ? ») ;
- utiliser la communication entre pairs dans des équipes de travail ou dans des débats en plénière comme moteur des apprentissages permet à l'élève de développer des compétences sociales et civiques (respect, écoute…) qui elles-mêmes vont favoriser les apprentissages ;
- laisser les élèves rédiger ou résoudre les exercices à leur manière, sans donner de modèle de rédaction ou de résolution d'exercices.

« Œuvrer à la construction d'une relation de confiance avec les parents. »

Nous respectons les parents et portons un regard positif sur eux. Nous partons du principe qu'ils font de leur mieux, évitons de les juger, censurons toute parole qui pourrait laisser croire que nous ne leur faisons pas confiance ou que nous les trouvons défaillants.
Chaque fois que nous le pouvons, en particulier en début d'année via une lettre qui leur est adressée, nous cherchons à les associer, nous les informons sur le sens de notre travail et de nos choix. En entretien, nous écoutons ce qu'ils ont à dire et nous demandons ce qu'ils pensent des problèmes qui se posent ou des avis professionnels que nous formulons. Nous voyons d'un bon œil qu'un élève se fasse aider par ses parents mais nous n'attendons de ces derniers aucune compétence mathématique. Si un élève ne fait pas de manière suffisamment régulière son travail à la maison et que les discussions avec lui n'ont pas inversé la tendance, nous en informons les parents.

« Réfléchir sur sa pratique – seul et entre pairs – et réinvestir les résultats de sa réflexion dans l'action. »

Pour progresser, quand nous avons repéré un dysfonctionnement dans la classe, nous cherchons d'abord ce qui pourrait ne pas convenir dans notre pratique. Par exemple, si une classe est indisciplinée, notre premier

réflexe n'est pas de penser que c'est un mauvais cru, ni de demander aux élèves de se tenir tranquilles (même si nous le faisons à chaud) mais plutôt de chercher en quoi ce que nous proposons aux élèves ne convient pas, pourquoi ils ne sont pas intéressés par nos exercices.
À la fin de chaque journée de cours, nous revenons sur nos séances pour une comparaison entre prévu et vécu. Ai-je atteint mes objectifs d'apprentissage ? Pour combien d'élèves ? Si trop d'élèves sont en difficulté lourde, nous en tenons compte pour la préparation de la séance suivante. Bien sûr, nous n'avons pas prise sur les programmes, que nous respectons le plus scrupuleusement possible. Bien sûr, nous ne pouvons pas changer le vécu parfois difficile des élèves à l'extérieur. Mais nous avons quand même une véritable marge de manœuvre. Nous travaillons dans plusieurs équipes, disciplinaires ou interdisciplinaires, internes ou externes à l'établissement. Nous y rencontrons des collègues et évitons l'isolement. Ces équipes nourrissent notre pratique, nous permettent d'éprouver les choses auxquelles nous croyons, nous rassurent les mauvais jours, nous permettent d'analyser plus finement nos expériences et nous aident à rester en mouvement.

Si vous avez envie de tester quelques-unes de nos séquences, vous pouvez peut-être le faire en équipe pour pouvoir en parler et vous entraider.

CHAPITRE 2

Fonctionnement avec des équipes de trois ou quatre élèves

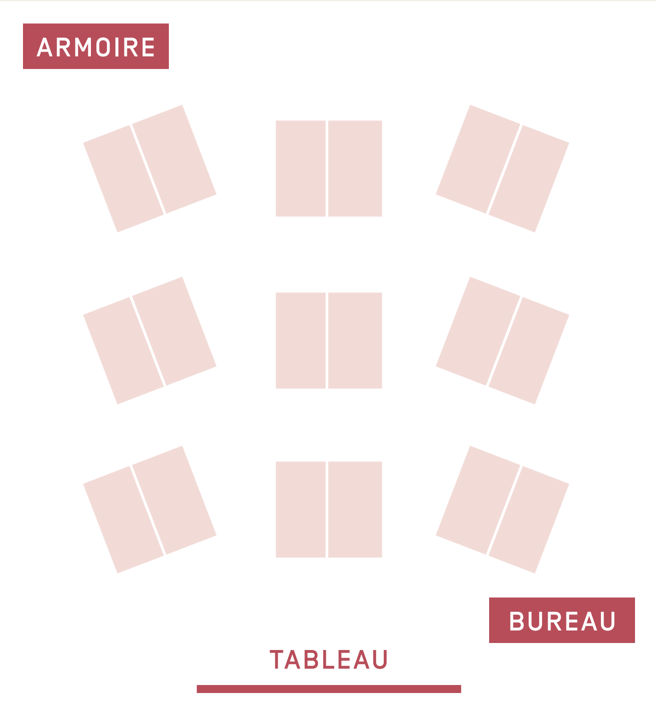
Hélène Staïner est encore débutante. Ce jour-là, elle expérimente une activité conçue à l'IREM. Elle place les élèves par groupes de quatre, donne les consignes, puis n'intervient plus du tout avant de ramasser les productions. Elle passe donc toute l'heure à regarder les élèves qui travaillent, discutent et construisent ensemble des stratégies. On est en mars, elle pense bien connaître ses élèves, pourtant c'est la stupéfaction : c'est bien Pierre qui est en train d'argumenter avec passion, lui si passif d'habitude ! Ce sont bien Rémi et Julie qui prennent en charge la rédaction pour le groupe, eux qui n'écrivaient pas deux mots sans soupirer jusqu'à aujourd'hui ! Une vraie révélation pour Hélène. Ce travail en groupes décrit dans les ouvrages de pédagogie ou de didactique s'impose à elle comme une première piste et devient intéressant pour mener ponctuellement des activités de recherche. Mais le trouvant difficile à utiliser tel quel chaque jour, elle l'adapte en gardant néanmoins trois grands principes :

– le travail individuel est un préalable indispensable ;
– un exercice se clôt par une synthèse en plénière ;
– les élèves ont besoin d'être accompagnés pour apprendre à travailler à plusieurs.

À partir de là, tous les coups seront permis. Ce travail de groupes traditionnel va être assoupli, élargi et finalement rebaptisé « travail en équipes ». L'ensemble de l'organisation – travail sans communication puis avec concertation au sein de l'équipe et enfin en plénière – permettra de *tout* faire.

Il existe beaucoup d'autres modes de fonctionnement que le travail en équipes. Si vous ne souhaitez pas regrouper quotidiennement les élèves par trois ou quatre, vous pourrez tout de même trouver dans cet ouvrage des pistes de travail qui ne dépendent pas de ce mode de fonctionnement ou qui seront faciles à adapter. En outre, vous pourrez aussi choisir de regrouper les élèves seulement de temps en temps.

Configuration de la classe



À l'exception des devoirs surveillés, les élèves sont toujours par groupes de trois ou quatre appelés « équipes ».

> Si vous souhaitez tester le travail en équipes mais ne souhaitez pas déplacer les tables, vous pouvez demander aux élèves de se retourner deux par deux pour constituer ponctuellement des équipes de quatre avec les deux élèves assis derrière eux.

Quand nous pouvons disposer d'une salle personnelle, les tables restent en place d'une séance à l'autre. Une salle personnelle nous permet aussi de stocker photocopies d'exercices et de résumés, matériel de géométrie, caméra…

> Si vous disposez d'une salle personnelle, vous pourrez tester nos propositions dans de meilleures conditions. Pour l'obtenir, essayez d'avancer les valeurs défendues au travers de votre pratique du travail en équipes et de votre objectif de différenciation.

Constitution des équipes

EN DÉBUT D'ANNÉE

Nous proposons aux élèves de constituer eux-mêmes les équipes car il est plus sécurisant de découvrir un nouveau lieu de travail, un nouveau professeur et de nouvelles règles dans une équipe d'amis. Il arrive que certaines équipes dysfonctionnent très vite, surtout en se dispersant en bavardages. Entre amis, le danger est plus grand et nous leur disons : « Je pense que vous perdez du temps en bavardages et que votre travail s'en ressent. Voici ce que je propose : ou bien vous réglez ce problème et on fait le point dans trois séances, ou bien vous renoncez à votre équipe. » Si les dysfonctionnements persistent, nous constituons alors nous-mêmes certaines équipes.

LES ÉQUIPES CHANGENT-ELLES AU COURS DE L'ANNÉE ?

En début d'année, nous essayons donc de stabiliser les équipes. Cependant, une équipe qui travaille longtemps sans apport de nouveaux membres s'installe souvent progressivement dans des habitudes impropres aux apprentissages. Par exemple Pierre, qui a eu besoin de beaucoup d'aide en début d'année, a maintenant dans son équipe l'image de celui qu'il faut toujours beaucoup aider. Bien qu'il ait progressé, il peut difficilement occuper une nouvelle place dans l'équipe. Si Pierre va travailler avec d'autres élèves, il sera peut-être perçu différemment. Autre exemple : Marie et Fatima sont amies, elle s'épaulent beaucoup mais Marie semble dépendre excessivement de l'approbation de Fatima. Marie développera plus facilement son autonomie sans Fatima.

> En début d'année, vous aurez peut-être l'impression que vos collègues qui ne constituent pas d'équipes de travail rencontreront moins de difficultés que vous dans la gestion de classe. Vous observerez probablement qu'ensuite la tendance s'inversera.

Quand la classe a pris son rythme de croisière, par exemple après les premières vacances, nous proposons aux élèves de constituer de nouvelles équipes, en introduisant des contraintes : « Vous devez constituer des équipes mixtes. » ou : « Vous pouvez garder avec vous un camarade de l'équipe précédente, mais pas plus. » ou bien : « Pierre, tu te sépares de Bamfa. Julie, Marie et Fatima, vous vous séparez. Je pense que vous savez pourquoi puisque nous en avons déjà parlé. »
Aucun changement ne peut être fait sans concertation avec nous. Si un élève est mal dans son équipe, il vient nous trouver pour en parler et nous prenons, avec lui, une décision : changement d'équipe ou régulation, en donnant toujours la priorité à la régulation qui nous paraît plus éducative.
Parfois, nous constituons nous-mêmes les équipes :
- ponctuellement pour proposer des activités différenciées, pour regrouper des élèves qui ont eu individuellement des stratégies différentes, pour regrouper des élèves qui ont la même calculatrice… ;
- plus durablement parce que nous pensons que certaines rencontres d'élèves pourraient être enrichissantes (nous ne le faisons que quand nous connaissons bien les élèves).

Au moment où nous annonçons les nouvelles équipes, il y a souvent des contestations. Nous expliquons que nous souhaitons que les élèves obtempèrent mais qu'après trois séances d'essai, il sera possible de venir discuter avec nous des difficultés rencontrées.
Dans tous les cas, nous évitons les changements d'équipes trop fréquents : au moins trois ou quatre semaines entre deux changements.

Ne croyez pas que le système « Deux élèves à l'aise et deux élèves en difficulté par équipe » fonctionne toujours bien. Un élève en difficulté s'exprimera parfois plus facilement dans une équipe homogène. Un élève à l'aise se lassera peut-être d'épauler trop longtemps un camarade.

Modes de fonctionnement des équipes

SANS COMMUNICATION

En mode « sans communication », aucun échange n'est permis entre les membres de l'équipe. Cela n'a lieu d'être que lors d'un travail individuel (voir p. 37).
Très naturellement, beaucoup d'élèves ont plutôt tendance, dès le début d'un travail, à demander de l'aide au professeur ou à leurs camarades pour gérer leur stress devant la feuille blanche. Il est donc indispensable de leur expliquer pourquoi nous tenons à ce qu'ils travaillent d'abord individuellement : « Vous allez pouvoir commencer à votre façon sans vous laisser influencer par les autres et vous aurez ainsi plus d'idées quand vous discuterez ensemble. Je verrai mieux les élèves en difficulté et je saurai donc mieux les aider après. Mon expérience de professeur m'a appris que vous comprendrez mieux si vous commencez d'abord par chercher seul, même si vous n'arrivez pas au bout. » En outre, nous expliquons aux élèves que c'est nous qui choisissons qui aider et qu'ils n'ont pas à nous appeler.
Mis en place en début d'année, le mode sans communication nécessite d'être régulé lors des premières utilisations. Au début d'un travail individuel, notre premier rôle est de faire respecter le dispositif en rappelant à l'ordre ceux qui communiquent. La règle va s'installer au fur et à mesure des travaux individuels, mais nous restons vigilants jusqu'à la fin de l'année car nous observons qu'elle reste toujours un peu fragile. Nous essayons de sécuriser les élèves en leur montrant que nous veillons sur eux, que nous voyons ce qui se passe. À un élève angoissé au départ et qui a fini par réussir, nous montrons le chemin parcouru et le plaisir qu'il en éprouve.

Sans un travail individuel vraiment individuel, certains élèves ne feront pas l'effort de réflexion nécessaire pour entrer dans le problème, et les échanges en équipe auront beaucoup moins d'intérêt. Maintenir la règle de non-communication est fondamental !

AVEC CONCERTATION

Durant un laps de temps et avec un objectif précis, que nous annonçons, les élèves peuvent échanger, au sein de leur équipe uniquement, pour avancer ensemble en vue d'une réalisation individuelle ou collective, écrite ou orale. Le mode « avec concertation » est adopté lors d'un travail en équipes (voir p. 39).
Quand les élèves sont en concertation, ils vivent de véritables temps d'apprentissage et de création. C'est parce que chacun a envie de parler à l'autre de son travail qu'il va préciser sa pensée pour être compris. C'est pour ensuite mieux convaincre l'autre que chacun va faire l'effort d'écouter son argumentation. C'est en exposant aux autres un embryon d'idée que l'inspiration viendra. C'est enfin pour mieux convaincre la classe par la suite que les équipes ont à cœur de soigner leur production collective. Les élèves ont souvent envie de mettre leur nom sur la production de l'équipe parce qu'ils en sont fiers.
Quand ils se concertent, les élèves communiquent en situation d'apprentissage, et certains sont parfois fragilisés. Ils savent qu'ils ont des difficultés, ont peur de dire des bêtises ou peur que les autres se moquent d'eux. En début d'année, pour les mettre en confiance, nous apprenons aux élèves à bien communiquer. Les règles sont construites avec eux. Par exemple, avant le premier travail en concertation, nous disons : « Tout à l'heure, vous allez devoir travailler en équipe pour produire quelque chose de commun. Avant cela, je vous propose de noter individuellement pendant 5 min, sur votre cahier de recherche, les règles qui vous semblent nécessaires au bon fonctionnement de votre équipe. » En plénière, les règles sont proposées et débattues, puis une liste est constituée, par exemple :
– il faut qu'on s'écoute les uns les autres ;
– tout le monde doit participer ;
– on doit être patient avec ceux qui n'y arrivent pas ;
– il ne faut pas parler trop fort.
Comme nous, les élèves doivent accepter qu'il y ait un peu de bruit lors du travail avec concertation et ne pas accepter qu'il y en ait trop. Certains élèves auront peut-être un seuil de tolérance au bruit plus faible que vous.

AVEC ENTRAIDE

Les élèves essaient le plus possible de réussir seuls mais ils peuvent, si besoin, échanger à tout moment. Ce mode de fonctionnement est utilisé lors des travaux personnels avec entraide (voir p. 41). Les règles pour la communication sont les mêmes que celles instaurées pour le mode avec concertation, et l'équipe peut servir de ressource pour avancer en cas de difficulté persistante.

Par exemple, un élève peut demander à un ou plusieurs camarades de lui donner une piste ou un avis, de contrôler son résultat en le comparant aux leurs.
Ce dispositif nécessite que les élèves aient bien compris l'intérêt du travail individuel dans leurs apprentissages. C'est pourquoi nous ne le proposons pas en début d'année. En outre, le mettre en œuvre trop tôt risquerait de nuire à l'installation d'un travail individuel puisque son principe est de rendre un peu floue la frontière entre les modes sans communication et avec concertation, ou en tout cas de la laisser à l'initiative des élèves. S'il nécessite d'emblée un certain degré d'autonomie de la part des élèves, ce dispositif leur permet cependant aussi de développer cette autonomie.
Des élèves peuvent être tentés de gérer une difficulté en recourant trop vite à l'entraide. Nous suivons particulièrement, de loin, les élèves qui se découragent facilement pour éventuellement pouvoir intervenir : « Essaie encore, tu y es presque. » ou bien : « Prends ton temps pour chercher, tu n'as pas besoin d'essayer d'aller aussi vite que les autres membres de l'équipe, à chacun son rythme. » ou bien encore : « En le faisant doucement et tout seul, tu apprendras plus de choses qu'en le faisant vite et avec de l'aide. »
Certains élèves rapides jouent d'emblée leur rôle de *personne-ressource* avec bonheur et efficacité. À l'opposé, d'autres peuvent trouver inintéressant de s'occuper des autres mais cela fait partie de leur travail en mathématiques, au même titre que le reste. Ils doivent progresser à la fois dans l'acquisition des valeurs humaines qui sous-tendent l'entraide et dans les formes de communication qu'elle nécessite de développer. Nous prenons soin de les accompagner dans cet apprentissage en valorisant leurs efforts et en les aidant à identifier les progrès qu'ils ont à faire. Nous pointons aussi du doigt les répercussions positives de l'entraide sur leurs compétences mathématiques proprement dites : « Quand tu expliques à ton copain, tu comprends mieux les choses. Il te posera des questions qui te pousseront vers tes limites. Tu devras creuser plus loin et cela pourra te donner de bonnes idées pour rédiger. Ça t'aidera aussi sûrement à mieux retenir les choses, car la mémoire fonctionne souvent comme ça. »

> Vous vous demanderez peut-être si vos élèves vont pouvoir ensuite se réhabituer à un enseignement plus traditionnel. En agissant par eux-mêmes avec vous, ils vont développer la capacité à prendre des initiatives, à réfléchir par eux-mêmes, à être autonomes, et ainsi très bien se préparer à être très actifs intérieurement, même dans un enseignement plus frontal.

EN PLÉNIÈRE

En plénière (voir notamment p. 46), les élèves travaillent en classe entière. Ils interviennent en leur nom si la plénière fait suite à un travail individuel, ou au nom de l'équipe après un travail collectif. La plupart des règles à respecter sont plus faciles à installer car elles sont plus classiques : lever la main pour prendre la parole, écouter ce qui se dit, s'exprimer de façon respectueuse. Mais les deux règles suivantes le sont moins.
Ils ne doivent plus écrire ni utiliser leur calculatrice. Certains élèves en début d'année sont tentés de poursuivre leur travail personnel, surtout au moment où une piste vient d'être donnée. Nous sommes intransigeants sur ce point en nous référant par exemple à la règle du respect de celui qui s'exprime et mérite d'être écouté. On peut aussi dire aux élèves que des choses essentielles pour la suite vont être dites et qu'ils risquent de les manquer.
Ils doivent attendre calmement d'être interrogés pour prendre la parole. Certains élèves n'apprécient pas d'attendre un peu avant d'être interrogés alors qu'ils avaient levé la main en premier, car nous introduisons un temps inhabituellement long entre une question posée et le don de la parole à un élève ou entre deux prises de parole. Cela permet aux plus lents de participer aux échanges, mais demande d'être explicité pour les élèves rapides, pour donner un sens positif à ce qui les impatiente parfois. Nous reconnaissons aussi parfois publiquement que tel élève a été patient et lui disons que nous lui ferons jouer un rôle central à d'autres moments.
Avant de passer en plénière, nous intervenons fermement pour que tous les élèves interrompent leur travail en équipes ou individuel, et nous essayons de donner du sens à ce qui va se jouer pour eux pendant la plénière. Nous faisons en sorte que tous sachent bien en quoi cela est important : va-t-on faire le point pour poursuivre ensuite ? partager nos difficultés ? recevoir un conseil du professeur ? clore et découvrir une chose nouvelle ?

PASSAGE D'UN MODE À UN AUTRE

La résolution d'un exercice se déroule toujours en faisant alterner plusieurs modes. Elle commence toujours sans communication, se termine toujours en plénière, avec parfois de l'entraide ou de la concertation entre les deux.
C'est nous qui décidons de changer de mode, pas les élèves. Nous menons la transition avec fermeté, surtout en début d'année, sinon elle peut être trop longue. Nous sommes vigilants car les élèves sont souvent enclins à rester dans le mode précédent. Par exemple, les élèves prennent vite goût au travail en équipes et ont parfois du mal à s'arrêter pour passer au travail en plénière.
L'observation du travail des élèves et du fonctionnement des équipes et de la classe est décisive pour choisir le moment propice à un changement de mode.

C'est rarement le bon moment pour tous et nous devons accepter les compromis. Par exemple, une équipe n'a pas terminé la rédaction complète d'un texte de démonstration alors que toutes les autres ont fini depuis 1 ou 2 min, nous décidons de passer tout de même en plénière en faisant un compromis : nous solliciterons particulièrement l'équipe retardataire sur le début de son texte et la rassurerons sur le fait qu'elle pourra se prononcer tout de même sur la fin des textes des autres puisqu'elle a des traces sur le cahier de recherche.
Parfois, nous décidons que le changement de mode ne se fera pas au même rythme pour tous. Nous demandons par exemple à une équipe qui n'avance plus bien en concertation de reprendre sans communication pendant quelques minutes.

Groupe-classe, communauté mathématique et histoire des mathématiques

La plénière est un moment privilégié pour développer dans la classe le sentiment d'une petite communauté d'apprentissage et de recherche. Tout travail individuel ou en équipes est mené dans la perspective d'une construction collective en classe entière. C'est en partie en nous appuyant sur cette idée de projet commun, de construction d'une culture commune dans la classe, que nous tentons de donner du sens au travail des élèves. Nous essayons de renforcer l'idée de groupe et de solidarité dans la classe. La première bonne réponse en plénière de Clément, élève en difficulté, est vécue comme un événement dont tous se réjouissent (nous théâtralisons). De même, quand Yusuf, notre petit génie, réussit un défi particulièrement difficile en début de séance, c'est la 2de 3 tout entière qui en sort grandie.

Dans le même esprit, les temps de recherche et de découverte en classe sont, le plus souvent possible, mis en lien avec le travail de la communauté plus large des mathématiques. Par exemple, nous ne disons pas : « On admet cette propriété. » mais plutôt : « Des mathématiciennes et des mathématiciens ont prouvé que la conjecture que vous venez de faire est juste. » Ou bien : « C'est normal que vous ayez du mal à comprendre, il a fallu des centaines d'années à l'humanité avant de comprendre l'intérêt des déterminants ! » Ou encore : « Comme ce qui s'est passé pour les mathématiciens Blaise Pascal et Pierre de Fermat quand ils ont échangé sur le problème des partis, c'est de votre travail en équipes qu'a émergé des avancées. »

Dans la mesure du possible, nous inscrivons le travail fait en classe dans un contexte historique. Par exemple, quand un élève considère, à tort, que les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables, nous lui disons qu'il commet la même erreur que d'Alembert dans l'*Encyclopédie* (voir p. 91). Nous apportons aux élèves des éléments qui leur permettent de comprendre l'évolution de certaines notions, par exemple les écritures littérales (textes d'Al-Khwârizmî, p. 154 ; utilisation des lettres de François Viète, p. 159). Nous leur montrons que ce qu'ils voient cette année fait partie d'un héritage précieux, offert depuis plusieurs millénaires par toute la communauté mathématique. Les élèves prennent ainsi du recul sur notre XXIe siècle, et développent une meilleure perception des siècles passés. Le travail sur l'histoire des mathématiques est aussi un moment à part : on y raconte des histoires, vécues par des hommes et des femmes comme tout le monde ou presque, on y lit des mathématiques hors des manuels scolaires, ce qui les désacralise et les humanise.

CHAPITRE 3

Cahiers et outils

Cahier de bord

Ce que nous appelons « cahier de bord » n'est ni un cahier de cours, ni un cahier d'exercices, ni un mélange des deux. Un peu comme dans un journal de bord dans lequel les marins notent les faits marquants, l'élève consigne au fur et à mesure dans son cahier de bord l'histoire de la classe de mathématiques, le vécu collectif : des productions individuelles (voir p. 118) ou d'équipes (voir p. 109) généralement annotées après leur étude en plénière, des solutions non rédigées annotées (voir le tableau de valeurs p. 230), des solutions informelles (voir p. 217), des paroles individuelles avec le nom des auteurs (voir p. 82) – c'est plus marquant ! –, des pistes qui n'aboutissent pas, des erreurs qui sont travaillées collectivement (voir p. 118 et 130)… Plus classiquement, l'élève y colle les énoncés des exercices, y consigne leur solution ainsi que les enseignements à en tirer, les bilans, etc. Pour éviter d'alourdir le cahier de bord, les techniques qui doivent être automatisées dans la durée n'y figurent que la première fois, et les exercices similaires sont faits sur le cahier de recherche les fois suivantes.

> Si l'idée du cahier de bord vous séduit, vous apprendrez petit à petit à l'utiliser à votre manière. Il y a mille et une façons d'y faire figurer ce qui s'est passé dans la classe.

Tout ce qui se trouve dans le cahier de bord doit être correct, ou sinon explicitement désigné comme erroné. Les écrits qui y figurent sont pour la plupart élaborés collectivement sous notre contrôle, puis recopiés ou collés. Si une rédaction personnelle s'y trouve, comme elle peut comporter des erreurs, nous l'annotons avant qu'elle ne soit mise dans le cahier. De même, les calculs faits directement sur le cahier de bord doivent être validés d'une manière ou d'une autre.

Dans le cahier de bord, les écrits sont de nature très diverse. Nous veillons à ce que la nature de chacun soit bien identifiée par les élèves et les faisons précéder d'informations telles que : « Méthode de Gaëlle », « Sans rédiger », « Propriété », « Exemples »… Les informations à retenir en particulier, ancrages intermédiaires dans l'apprentissage ou énoncés institutionnalisés, sont encadrées.

Ce cahier contribue à donner un sens au cours de mathématiques et à la présence de chacun en classe. En effet, ce qui est fait par chaque élève lors des recherches individuelles alimente la réflexion collective, et le cahier de bord permet de garder la trace de tous les événements importants qui fédèrent les élèves et qui font que la classe construit quelque chose qui a de l'avenir. La classe se constitue ainsi en petite communauté qui fait des mathématiques.

COMMENT L'ORGANISONS-NOUS ?

Le cahier de bord est un cahier 24 × 32 cm qui permet de coller des photocopies A4 sans découpage, et évite ainsi des pertes de temps. Il a 96 pages pour alléger le sac. Les élèves utilisent successivement deux cahiers dans l'année. Un classeur peut être plus adapté si l'élève est apte à le tenir correctement, mais en général nous le déconseillons.

Pour répondre aux besoins liés au chevauchement des apprentissages, notamment pour pouvoir mener de front un apprentissage en phase d'élaboration et un autre en phase de prise en main (voir p. 25), le cahier de bord comprend quatre parties décrites dans un sommaire collé en début d'année (voir tableau page suivante).
Les seuls repères visuels forts sont les numéros des parties du cahier, les titres des séquences et les points importants encadrés. Il n'y a ni numéros de section au sein d'une séquence, ni titres intermédiaires.

COMMENT APPRENONS-NOUS AUX ÉLÈVES À BIEN LE TENIR ?

L'élève doit comprendre que même si son cahier de bord contient parfois des traces personnelles, ce n'est pas un cahier personnel, ce n'est pas un espace privé. Nous sommes garants de son contenu, nous devons donc pouvoir le regarder, le critiquer et amener l'élève à modifier sa façon de le tenir. Nous devons être très vigilants pour obtenir la rigueur des élèves dans l'organisation de leur cahier. Au début, c'est un peu difficile, mais la bonne tenue du cahier de bord est un de nos objectifs majeurs pendant le premier mois.
Chaque fois que quelque chose va être inscrit dans le cahier de bord, nous interrompons la classe pour donner une consigne précise. Par exemple : « Prenez vos cahiers

PARTIE 1	PARTIE 2	PARTIE 3	PARTIE 4
Du début du cahier vers la partie 2	Du centre du cahier vers la partie 1	Du centre du cahier vers la partie 4	De la fin du cahier vers la partie 3
Probabilités Statistiques	Fonctions	Géométrie	Calcul littéral Algorithmique et programmation Ensembles

de bord en partie 1. » Quand tout le monde y est, mais pas avant : « Nous allons écrire ce que nous venons de découvrir. C'est quelque chose de nouveau, vous allez donc changer de page. » Puis : « Laissez la place du titre de la séquence et collez l'énoncé sur lequel nous venons de travailler. » Pendant que les élèves collent, nous faisons un tour rapide pour nous assurer que tous les élèves respectent les consignes. Quand les élèves nous voient faire ce contrôle en début d'année, ils comprennent que nous accordons de l'importance à l'organisation du cahier. Ils font alors eux-mêmes davantage attention mais pour une mauvaise raison, par peur de se faire interpeller. Pour construire de meilleures raisons, nous disons souvent : « Ton cahier de bord doit pouvoir t'aider à mieux comprendre ce que nous construisons ensemble dans la classe. En relisant des passages, tu dois pouvoir parcourir à nouveau seul des petits bouts du chemin que nous avons fait pour construire un théorème, une technique. » Nous restons vigilants tout au long de l'année, particulièrement à l'égard des élèves en difficulté. Nous avons remarqué qu'un relâchement trop grand de notre attention engageait un relâchement dans l'application de certains élèves.
De temps en temps, nous demandons aux élèves à quel endroit du cahier nous pourrions noter tel ou tel point : le travail sur cette question leur permet de mieux s'approprier le principe de cette organisation et donc de mieux utiliser leur cahier de bord.

Au début, il est parfois difficile de bien surveiller la tenue des cahiers. Vous pouvez, de temps en temps, en relever deux ou trois bien choisis.

COMMENT L'ÉLÈVE UTILISE-T-IL SON CAHIER DE BORD ?

C'est ce cahier que l'élève doit utiliser quand il veut travailler ou retravailler à la maison un apprentissage en phase d'élaboration ou de prise en main. Comme son contenu est très proche du vécu de l'élève dans le collectif de la classe, ce cahier lui permet de retrouver tout ce qui a contribué à la construction du savoir. Cependant, il ne le fera que s'il perçoit bien que ce cahier peut être un véritable outil de travail personnel. Les ancrages intermédiaires l'aident à avancer en sécurité, et à passer d'une séance à l'autre sans véritable rupture.
Ce statut d'outil est à construire en classe. Il faut d'abord un peu de temps, parfois plusieurs semaines, pour que les élèves identifient bien ce qui est consigné dans ce cahier et lui donnent du sens. En leur imposant à certains moments de s'y reporter pour chercher une information, nous renforçons l'idée que c'est un cahier utile. Par exemple, avant de poursuivre un travail d'une séance à l'autre, il nous arrive de faire lire silencieusement la trace de la dernière séance. Quand un élève fait des erreurs au début d'une prise en main, il peut être formateur de le ramener au sens en l'invitant à reprendre une partie du travail d'élaboration. Par exemple, si un élève écrit $(x+4)^2 = x^2 + 4^2$ nous l'invitons à retourner voir le bilan sur le carré d'une somme (voir p. 175). Quand un élève se trompe sur une copie, nous écrivons qu'il devrait retourner voir tel exercice. Les documents que nous distribuons pour aider les élèves à préparer les évaluations sommatives font référence à des exercices du cahier de bord. Notre objectif est de construire petit à petit de l'autonomie dans l'utilisation de ce cahier.

Cahier de recherche

C'est un cahier petit format de 96 pages, bon marché. Il est réservé aux mathématiques, est inséré dans le cahier de bord (les élèves l'oublient ainsi beaucoup plus rarement) et est toujours ouvert en classe. C'est le cahier le plus utilisé par l'élève. Il y mène en toute liberté les travaux individuels ou collectifs. Nous lui demandons d'être en mesure de retrouver les traces d'une recherche d'une séance à l'autre. C'est une façon de réduire l'impact négatif du découpage de la semaine en quatre séances : si la recherche n'est pas terminée, on peut la reprendre directement la fois suivante puisqu'on en garde les traces (la feuille de brouillon se perd et le cahier de brouillon, souvent pluridisciplinaire, sert à beaucoup trop de choses pour permettre d'atteindre cet objectif). Souvent, de sa propre initiative, l'élève y recherche aussi des traces personnelles plus anciennes au cours d'un nouveau travail.
Il n'est pas nécessaire que les élèves écrivent dans le cahier de recherche les solutions des exercices, ce qui permet souvent un gain de temps. Les élèves savent que ce qui est sur ce cahier peut être faux et ne peut pas servir de référence. Quand il est complet, ce qui se produit souvent, l'élève en fait ce qu'il veut, et peut éventuellement le jeter.
Il est nécessaire d'insister pour que certains élèves comprennent que ce cahier ne doit pas être spécialement bien tenu, qu'il n'est pas utile de noter la date ni de

mettre du correcteur sur ce qui est faux. L'habitude du « beau cahier » est parfois tenace !
Nous remarquons que certains élèves l'utilisent de façon très personnelle, ils y notent en rouge une chose qu'ils veulent avoir à portée de main, ils entourent une erreur qu'ils font souvent et choisissent de la corriger… Une élève nous a dit qu'elle le consultait avant un contrôle pour retrouver les erreurs qu'elle avait commises.

POURQUOI CE NOM ?

Beaucoup d'élèves ont la fâcheuse tendance de ne rien écrire tant qu'ils n'ont pas l'impression de détenir une solution. Ils se lancent alors souvent dans une rédaction directe sans envisager de textes intermédiaires (croquis, plan, idées, début de calcul…). Ce cahier redonne ses lettres de noblesse à la phase de recherche, aux essais même infructueux, aux écrits provisoires et aux textes intermédiaires d'où émergent les solutions.
Nous préférons donc l'appeler « cahier de recherche » plutôt que « cahier de brouillon », pour éviter l'impact négatif du mot « brouillon » qui reflète souvent assez mal, pour les élèves en tout cas, l'importance de ce qui s'y joue.

COMMENT APPRENONS-NOUS AUX ÉLÈVES À BIEN L'UTILISER ?

Il ne suffit pas que l'élève possède un tel cahier pour redonner une véritable place à la phase de recherche, il a aussi besoin d'être épaulé pour apprendre à l'utiliser. Très souvent, en début d'année, nous discutons avec les élèves de la forme de ce qu'ils écrivent sur le cahier de recherche pour leur donner les nouvelles autorisations dont ils ont parfois besoin pour avancer : sur le cahier de recherche, on peut raturer, on n'a pas besoin d'effaceur, on peut indiquer par des flèches des modifications de plan sans avoir à tout réécrire… Pour renforcer cette idée, nous projetons souvent des écrits de recherche à l'aide de la caméra et les soumettons à l'étude collective.

Cahier de résumés

C'est un cahier petit format de 96 pages dans lequel l'élève colle des résumés et les démonstrations qui figurent au programme (les résumés et les démonstrations des séquences présentées dans cet ouvrage sont en ligne, voir encart « Accès aux contenus en ligne » à la fin de l'ouvrage). Les élèves l'ont toujours avec eux, il est inséré dans le cahier de bord avec le cahier de recherche.
Chaque résumé ou démonstration est paginée et repérée grâce au sommaire qui y est collé en début d'année.
Un résumé est une petite compilation des éléments importants de la séquence : énoncés formalisés, exemples, mises en garde. Nous les présentons aux élèves comme des « fiches de cours » écrites par leur professeur. À l'exception de quelques résumés écrits petit à petit à la main par les élèves, la plupart des résumés sont polycopiés. Nous faisons en sorte que les élèves y retrouvent, sans surprise, des extraits de leur cahier de bord. Les résumés qui sont sur l'espace en ligne n'ont donc pas vocation à être des modèles. Quand nous écrivons un résumé, nous sommes parfois tentés de détailler certaines parties mais nous veillons cependant à ce que cet ensemble ne soit pas trop long, car cela pourrait dissuader certains élèves de les lire et de s'en servir. Nous cherchons le meilleur compromis entre taille et clarté ; nous avons réussi quand les élèves aiment utiliser le résumé et qu'il semble efficace.
Si nécessaire, nous distribuons le résumé juste après la fin de l'apprentissage correspondant. Sinon, nous attendons d'en avoir plusieurs à distribuer pour tout donner ensemble, ce qui fait gagner un peu de temps. Nous essayons d'accompagner la distribution d'un résumé par une lecture d'un extrait en classe ou un travail à faire à la maison à partir du résumé, par exemple : « Répondre par écrit à la question suivante : En géométrie abstraite, à quoi peut servir une figure et à quoi ne peut pas servir une figure ? » (voir p. 107).
La première fonction du cahier de résumés est l'entretien de la mémoire. Il permet aussi de retrouver rapidement, en classe ou à la maison, une définition, une propriété ou une règle, à distance de son apprentissage. Il peut également être un véritable outil lors des phases de recherche.
Mais il ne suffit pas que les élèves en disposent pour qu'il remplisse ses fonctions. Il est indispensable d'apprendre aux élèves à l'utiliser. Pour cela, nous en faisons d'abord un outil en classe. Par exemple, quand les élèves recherchent quelles propriétés ils pourraient utiliser dans une situation donnée, nous leur conseillons de s'aider de leur cahier de résumés. Quand un élève pose une question dont la réponse se trouve dans son cahier de résumés, nous l'engageons à l'ouvrir et l'aidons si besoin. Lors de certaines évaluations, sur la programmation par exemple, nous autorisons les élèves à le consulter. En outre, nous informons les parents de son existence pour qu'ils encouragent leur enfant à y chercher des réponses à la maison quand il est en difficulté.
Beaucoup d'élèves gardent ce cahier d'une année sur l'autre. C'est un outil souvent apprécié.

Manuel, polycopiés

Sauf lorsqu'un élève demande des exercices supplémentaires, nous n'utilisons pas le manuel, car il a pour nous de nombreux inconvénients :
- les exercices d'introduction sont suivis immédiatement de l'énoncé de ce qui doit être découvert, il ne remplit donc pas souvent le cahier des charges de nos exercices d'introduction ;

– les questions posées dans les exercices sont rarement très ouvertes, ou si elles le sont les aides fournies sont directement disponibles à la fin de l'énoncé ;
– les exercices sont implantés dans les chapitres qui correspondent aux outils que leur résolution va nécessiter, les élèves peuvent donc faire l'économie du travail très formateur de la recherche des outils adéquats ;
– il est lourd !

Nous distribuons donc beaucoup d'énoncés, de travaux d'élèves photocopiés, de bilans dactylographiés, de résumés, de démonstrations à coller. Le moment et le lieu du collage ont leur importance :
– si nous ne voulons pas que les élèves sachent d'emblée de quelle séquence l'énoncé dépend, pour leur permettre de faire seuls le travail de mise en lien qui contribue à la construction du sens, le collage se fait après cette découverte ;
– s'il s'agit d'un entraînement technique clairement dépendant d'un savoir en construction, les élèves peuvent le coller dès qu'il est distribué ;
– si nous le pouvons, nous faisons coller un polycopié le jour où il est distribué. Sinon, nous demandons de le garder dans le cahier de recherche ;
– quand c'est possible, nous faisons coller plusieurs choses en même temps, par exemple un énoncé et plusieurs résumés, nous privilégions pour cela les fins de séance ou les vendredis après-midi.

Caméra

Nous utilisons une petite caméra avec un port USB. Toutes les séances de cet ouvrage sont prévues en tenant compte qu'une telle caméra est disponible. Nous conseillons au lecteur l'acquisition de ce matériel. En effet, outre la projection des travaux collectifs lors des plénières, la caméra permet également :
– la communication à chaud d'un début de piste individuelle lors d'un travail de recherche via le cahier de recherche d'un élève ;
– l'étude d'une erreur emblématique sur une copie lors d'une synthèse ;
– la lecture rapide de plusieurs rédactions proposées pour une même question ;
– le partage d'un croquis judicieux en phase de recherche ;
– la projection d'un énoncé dont nous avons une version papier (c'est parfois plus rapide que d'accéder à la version informatique) ;
– de montrer à tous la manipulation de matériel (jet de dés, de pièces, comment utiliser telle touche de la calculatrice…) ; etc.

La caméra permet la mutualisation, à chaud ou à distance, de n'importe quelle production, individuelle ou collective, susceptible d'intéresser toute la classe, ponctuellement ou plus longuement. C'est un outil précieux dans notre pratique quotidienne. Nous la laissons fréquemment branchée pendant toute la séance et pouvons ainsi l'utiliser dès que nous en avons besoin.

Calculatrice

Les élèves doivent avoir une calculatrice en classe. Nous leur conseillons d'avoir leur propre calculatrice lycée mais ne l'imposons pas. En début d'année, pour permettre aux élèves d'abandonner leur calculatrice collège, nous les aidons à effectuer les calculs de base sur leur calculatrice lycée.

Plus tard, nous apprenons aux élèves à étudier des séries statistiques et des fonctions avec la calculatrice. Nous fournissons aux élèves des tutoriels correspondant à la marque de leur calculatrice sous forme de résumés. Nous montrons sous la caméra comment utiliser la calculatrice la plus répandue dans la classe pendant que ceux qui ont une autre calculatrice sont regroupés selon les modèles et découvrent les nouvelles fonctionnalités à l'aide du tutoriel. Si besoin, nous faisons également une démonstration sous la caméra pour les calculatrices moins répandues.

Ordinateur

En classe, nous projetons des énoncés, des productions d'élèves, des bilans dactylographiés, des photos, des productions et portraits de mathématiciennes ou de mathématiciens, etc. Pour nous faciliter la tâche, nous fabriquons, à la fin de la préparation de chaque séquence, un diaporama de tous les documents à projeter (disponibles en ligne, voir encart « Accès aux contenus en ligne » en dernière page de cet ouvrage). Nous utilisons également de manière interactive le logiciel GeoGebra, un tableur, des environnements permettant de programmer en Python, le Club des expressions, Internet, en donnant si possible les commandes de l'ordinateur à un élève. Les élèves découvrent ainsi la puissance et les différentes fonctionnalités de ces outils.

Par demi-groupes, les élèves vont parfois en salle informatique pour utiliser un des logiciels précédents, surtout Python. Il nous arrive aussi de donner un travail à la maison sur ordinateur, par exemple une série du Club des expressions (voir p. 156), un programme Python à écrire ou compléter (voir p. 179) ou l'étude d'un fichier téléchargé sur le site de l'Insee (voir p. 72). Nous donnons assez de temps aux élèves pour faire ce travail, afin que tous puissent disposer d'un ordinateur et demander de l'aide en cas de problème technique.

CHAPITRE 4

Progression sur l'année

Fabrication d'un tableau de progression

Avant la rentrée, à partir du programme et des documents d'accompagnement, nous établissons un tableau de progression. Nous le réajustons tous les ans en fonction de ce que nous observons en classe ou pour tester plusieurs agencements.
Voici par exemple ci-dessous celui qui correspond à ce livre. Notre progression s'organise sur quatre colonnes correspondant aux quatre parties du cahier de bord. Les cases d'une même ligne correspondent approximativement au contenu d'une période scolaire. Les noms des séquences sont écrits en **gras**, celles dont le nom est précédé d'un sigle tel que S1, G1… sont celles qui figurent dans la deuxième partie du livre. La place d'une séquence dans le tableau marque seulement le début de l'apprentissage, car celui-ci peut se poursuivre bien au-delà de la période scolaire indiquée. En caractères normaux on trouve des détails sur le contenu, dont les démonstrations du programme, précédées de la lettre D. Les contenus sont écrits lors de leur première apparition dans l'année ; par exemple, « Diviseur, multiple » est travaillé dans S1, G1, etc. mais n'est écrit que dans S1, la première séquence où l'on travaille ce contenu. Quelques fils rouges sont notés en couleur : Algorithmique et programmation ; Tableur ; Ensembles ; Fonctions affines ; Logique.
Ce livre a été conçu en prenant les débuts de séquences dans l'ordre suivant : S1, G1, CL1, G2, F1, AP1, P1, Ensembles, CL2, Vecteurs (1re partie), S2, F2, CL3, P2, G3, Pourcentages et coefficients multiplicateurs, AP2, G4, F3, Vecteurs (2e partie), Inéquations, Échantillonnage, Système d'équations.

Traiter des questions spécifiques aux programmes de 1re pourrait nuire aux élèves en difficulté.
Cela pourrait aussi gêner les futurs enseignants de vos élèves.

PARTIE 1 — Statistiques et information chiffrée Probabilités	PARTIE 2 — Fonctions	PARTIE 3 — Géométrie	PARTIE 4 — Calcul littéral Algorithmique et programmation Ensembles
De septembre aux vacances d'automne			
S1 Statistiques : fluctuations d'une fréquence – Pourcentages – Diviseur, multiple, nombre premier – Fraction irréductible – D : $\frac{1}{3}$ non décimal – Raisonnement par l'absurde – Tableaux de valeurs		**G1 Problèmes de géométrie** – Projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d), D : c'est le point de (d) le plus proche de M – Géométries dessinée et abstraite – Implication, implication réciproque, équivalence – Racine carrée : équation $x^2 = a$, encadrement de $\sqrt{2}$ par balayage, notion d'algorithme, règles de calculs, D : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ – Encadrement par des décimaux – $S = \pi r^2$ – Pythagore : sens direct – D : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ – D : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ **G2 Géométrie plane repérée** – Repère, coordonnées – Coordonnées d'un milieu	**CL1 Expressions du premier degré** – Variables – Structure des expressions algébriques – Techniques de calcul littéral – Contre-exemple – Fonction (théorique) associée à un programme de calcul : définition des fonctions linéaires et affines – Notion d'équation (sans résolution experte)

PARTIE 1	PARTIE 2	PARTIE 3	PARTIE 4
Des vacances d'automne à celles du Jour de l'an			
P1 Probabilités (1re partie) – Modèle à partir de fréquences observées ou d'hypothèse d'équiprobabilité – Loi des grands nombres – Événement contraire – Interprétation ensembliste d'un événement – Signification du *et* et du *ou* – Simulation de lancers de pièce	**F1 Fonctions pratiques sans formule** – Variations d'une grandeur en fonction d'une autre – Image, antécédent, courbe, extremum, sens et tableau de variation – Inégalités larges, intervalles $[a\ ;\ b]$ – Détermination graphique d'extremum – Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$ graphiquement – Résolution graphique d'(in)équations – Ensemble des solutions d'une (in)équation, notation des ensembles finis, ensemble vide	**G2 Géométrie plane repérée** – Distance entre deux nombres réels – Notation $\|a\|$, relation $\sqrt{a^2} = \|a\|$ – Raisonnement par disjonction de cas – Distance entre deux points d'un plan – Pythagore : réciproque – Équations de droites particulières – Ensembles de points, élément, $\in$, $\notin$	**AP1 Algorithmique et programmation (1re partie)** – Mémoires de la calculatrice – Découverte de Python (entrée/sortie, instruction conditionnelle, variables de type entier et chaîne de caractères) et des fonctions informatiques à un ou plusieurs arguments **Ensembles** – Sous-ensemble, inclusion – Intersection, réunion, complémentaire – Caractérisation de $[a-r, a+r]$ par la condition $\|x-a\| \leq r$ – $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$
Des vacances du Jour de l'an à celles d'hiver			
S2 Séries statistiques – Indicateurs, comparaison – Linéarité de la moyenne – Étude de données réelles	**F2 Fonctions pratiques avec formule** – Modèles affines, non affines – Étude de fonctions avec la calculatrice – Courbes des fonctions affines – $d = vt$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$	**Vecteurs (1re partie)** – Définition, égalité – Somme, relation de Chasles – Coordonnées, expression de la norme d'un vecteur, base orthonormée	**CL2 Équations du premier degré** – Résolution experte d'équations du premier degré – Variables de type flottant, programme de calcul **CL3 Expressions du second degré, autres équations** – Identités remarquables – Équation produit ou quotient – Détermination de solution d'une équation – D : illustration géométrique de $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ – D : le carré d'un nombre impair est impair – D : irrationalité de $\sqrt{2}$ – Factorisation d'expressions du second degré – D : la somme de deux multiples de *a* est un multiple de *a*
Des vacances d'hiver à celles de printemps			
P2 Probabilités (2e partie) – Expériences aléatoires à plusieurs épreuves – Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres – Simulation – $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$	**F3 Fonctions théoriques** – Différence avec les fonctions pratiques – Extremum et sens de variation à l'aide d'opérations sur des inégalités – Fonctions affines : signes, sens de variation – Comparer deux quantités en utilisant leur différence	**G3 Coefficient directeur d'une droite non verticale** – Parallélisme, alignement – Programme de déplacement d'une tortue **G4 Équations d'une droite** – Équation réduite – Fonctions affines : interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement – Équation d'une droite passant par deux points donnés	**AP2 Algorithmique et programmation (2e partie)** – Simulation de marches aléatoires – Fonction retournant un nombre aléatoire – Boucles – Booléens

PARTIE 1	PARTIE 2	PARTIE 3	PARTIE 4
Des vacances de printemps à juin			
Pourcentages et coefficients multiplicateurs – Pourcentage de pourcentage – Évolution – Puissances **Échantillonnage** – Nuage de points – Étude des fluctuations d'une fréquence par simulation	**F3 Fonctions théoriques** – Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube – Intervalles autres que $[a ; b]$ – Fonctions paires, impaires – Longueur approchée d'une courbe – D : variations des fonctions carré, inverse, racine carrée – D : étude des positions relatives des courbes de fonctions de référence	**Vecteurs (2e partie)** – Vecteur directeur d'une droite – Produit d'un vecteur par un nombre, colinéarité, déterminant, parallélisme, alignement – D : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul – D : en utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite	**Inéquations** – Résolution d'inéquations du premier degré – Résolution d'une inéquation produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes – Résolution d'inéquations de type $f(x) < k$ pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube **Système d'équations** – Intersection de deux droites

COMMENT ORGANISONS-NOUS LA RÉPARTITION DES SÉQUENCES SUR L'ANNÉE ?

Nous ne faisons pas de révisions et n'employons d'ailleurs jamais ce mot. Nous choisissons en début d'année au moins une notion nouvelle pour provoquer l'intérêt – ici celle de projeté orthogonal –, et plutôt des notions qui ne présentent pas d'obstacles trop importants pour les élèves en difficulté afin de les mettre en réussite. Les élèves à l'aise ont tout de suite quelque chose à se mettre sous la dent et les élèves en difficulté ne pensent pas d'emblée qu'ils sont « nuls » parce qu'ils sèchent sur des exercices de révision.

Notre toute première séquence est S1. Nous retravaillons ainsi la notion de fréquence, prérequis important pour les probabilités et d'autres disciplines. Nous introduisons un peu de nouveauté avec la notion de fluctuation de fréquences.

Nous commençons tôt dans l'année les apprentissages les plus longs : fonctions, calcul littéral, notion d'équation de droite, algorithmique. Et afin de donner du temps à l'élève pour ses apprentissages, nous découpons souvent un même thème en plusieurs séquences espacées. Nous évitons de mener de manière rapprochée deux apprentissages difficiles pour les élèves.

Pour faciliter l'élaboration de la progression sur l'année, il peut être tentant de faire se succéder des blocs d'apprentissages. Mais alors les liens entre les savoirs seraient plus difficiles à établir, et surtout les élèves, notamment les plus fragiles, disposeraient de moins de temps d'assimilation.

Nous plaçons en fin d'année les séquences qui seront reprises de façon plus approfondie l'année suivante, et, parmi celles-là, de préférence celles qui peuvent tolérer un entraînement plus court, comme l'échantillonnage.

Nous essayons de ne pas aborder de nouveaux apprentissages après la mi-mai. Au cours de l'année, nous essayons d'être minimalistes sur certaines séquences. Cela permet de conserver de la matière pour organiser en fin d'année des séances autour de notions qui sont alors en phase de prise en main ou d'approfondissement (voir p. 25). Le travail peut être différencié dans la classe, en fonction du niveau des élèves et de leurs orientations futures.

Utilisation du tableau pendant l'année

ÉTALEMENT D'UNE SÉQUENCE DANS LE TEMPS

Une séquence n'est jamais menée d'un bloc. Sa place dans le tableau marque de manière seulement grossière son démarrage. Les phases de prise en main et d'approfondissement de certaines notions s'étalent bien au-delà de la fin apparente de la séquence dans le tableau, à travers des exercices qui s'intercalent de temps en temps, des exercices d'automatisation dans la durée, ou encore des devoirs à la maison.

De plus, pour être sûrs d'aborder tous les points du programme, nous sommes d'abord minimalistes et n'allons pas trop loin dans les phases de prise en main et de perfectionnement. Nous y revenons si possible en mai et juin.

MISE EN ŒUVRE SIMULTANÉE DES CONTENUS D'UNE MÊME LIGNE DU TABLEAU

À tout moment de l'année, nous menons en parallèle deux séquences prioritaires. Nous intercalons dans ce jumelage des exercices de préparation pour de futures séquences ou des exercices de prise en main ou d'approfondissement de séquences anciennes. Nous observons trois règles strictes pour passer d'une séquence à une autre :

– nous faisons durer le début d'un apprentissage le temps que les élèves les plus fragiles se l'approprient, en intercalant par exemple de petits entraînements techniques courts sur d'autres notions;
– nous n'interrompons pas trop longuement le début d'un apprentissage;
– nous attendons qu'un nouveau savoir commence à se stabiliser dans la classe avant d'en aborder un autre.

Nous décrivons dans la section « Préparation d'une séance » (voir p. 33) la manière dont nous organisons les premières séances de l'année.

Cette organisation donne un temps plus long aux élèves en difficulté pendant la découverte, les premières utilisations (voir p. 27) et l'assimilation, sans provoquer l'ennui des autres ou de perte de temps en classe. Le cahier de bord est partagé en quatre parties pour permettre ces chevauchements.

CHAPITRE 5

Construction d'une séquence

Nous appelons «séquence» la préparation que nous écrivons à l'avance sur un sujet donné, le mot « chapitre » nous semblant plus porteur de l'idée d'un cloisonnement des savoirs. Avant d'écrire une séquence, nous lisons le programme de la classe ainsi que ceux des niveaux inférieurs et supérieurs pour identifier le ou les nouveaux savoirs à construire, ainsi que la manière dont ils s'inscrivent dans le cursus de l'élève. Nous cherchons également dans les documents d'accompagnement des éclairages ou des idées. Commence ensuite le travail d'élaboration de la séquence. C'est une alchimie complexe où les essais et erreurs sont nombreux. Le résultat final prend la forme du plan de la séquence et de la liste des exercices choisis, accompagnés d'une mise en œuvre prévisionnelle. Nous sommes guidés par le souci d'une part de proposer de vrais problèmes de mathématiques aux élèves, de permettre à tous de progresser, de ne pas cumuler les obstacles au sein d'un même travail, et d'autre part par tous les principes qui sous-tendent notre pratique. L'expérience est très utile car elle permet d'anticiper la réaction des élèves face à telle ou telle question. Nous découpons en général l'apprentissage d'un nouveau savoir en quatre phases détaillées ci-après. Dans la partie suivante, le lecteur trouvera des explications sur les différents types d'exercices que nous pouvons donner.

Quatre phases d'un apprentissage

La plupart du temps, une séquence comprend un ou plusieurs savoirs nouveaux à enseigner: par exemple, coordonnées du milieu d'un segment, calcul de la distance entre deux points, distance entre deux nombres réels, etc. Nous découpons l'apprentissage d'un savoir nouveau en quatre phases décrites ici (quand il s'agit seulement de consolider ou d'approfondir techniquement un savoir ancien et de développer des savoir-faire, toutes les phases ne sont pas présentes). À chacune de ces phases correspond une mise en œuvre spécifique des exercices ainsi que des règles du jeu particulières pour les élèves. Il est donc important de bien identifier ces phases et d'en parler aux élèves pour qu'ils s'en emparent. Ne pas préciser aux élèves où ils en sont dans un apprentissage peut conduire à de graves dysfonctionnements. Un jour, les élèves d'une stagiaire étaient très en colère à la fin d'un exercice d'introduction d'un théorème. Il s'agissait de seulement conjecturer la proportionnalité des côtés de deux triangles, mais ils ont dit: « Ce n'est pas juste! On ne pouvait pas y arriver parce qu'on ne connaissait pas le théorème avant! »

PHASE DE PRÉPARATION

Nous travaillons sur les prérequis en redonnant en particulier du temps pour des notions de cycle 4. Cette préparation permet non seulement d'étaler l'apprentissage dans le temps mais aussi d'éviter par la suite les obstacles parasites, c'est-à-dire ceux qui ne se franchissent pas grâce au nouveau savoir. Par exemple, la mauvaise compréhension de la notion de fréquence constitue un obstacle parasite lors de la construction d'un modèle fréquentiste d'une expérience aléatoire dans la séquence P1 (voir p. 75). Il nécessiterait un arrêt de la classe qui risquerait de perturber une phase importante de l'apprentissage. Nous choisissons de le travailler à part et en amont dans la séquence S1. Cette phase de préparation peut donc être placée dans une séquence précédente mais aussi au début de la séquence elle-même. Ce n'est pas écrit, mais l'exercice projeté au début de P1 est considéré comme une phase de préparation.
Nous menons souvent à distance la préparation de l'apprentissage proprement dit pour donner aux élèves en difficulté un temps assez long d'assimilation, et pour qu'il nous soit possible d'y revenir si nécessaire. Cela fait également du futur apprentissage une véritable occasion de réinvestir ces prérequis. L'élève ne se dira pas : « Hier, on a travaillé sur telle propriété, c'est donc ça qui va servir ici. » mais plutôt : « Tiens, là, je reconnais que j'ai besoin de telle propriété. »
Nous ne voulons pas que cette phase soit ressentie par les élèves comme un temps de révision. Cela pourrait démobiliser ceux qui pensent savoir et provoquer un désarroi chez ceux qui pensent qu'ils devraient savoir. Pour cela, nous posons le plus souvent possible des questions ouvertes, de manière à ce que l'exercice constitue un véritable problème pour tous, et nous accompagnons plus particulièrement les élèves en difficulté.

PHASE D'ÉLABORATION

Nous découpons cette phase essentielle en trois sous-phases : la découverte, les premières utilisations et l'institutionnalisation.

Découverte

En vue de donner du sens, nous choisissons en général des exercices visant à faire découvrir à quelle nouvelle question le savoir en construction permet de répondre. Pour résoudre un exercice de découverte, l'élève doit franchir un obstacle. Le savoir en construction va le lui permettre ou rendra l'opération plus économique.
Nous proposons des questions ouvertes comme dans l'exercice des trois villes (p. 105) ou l'exercice de la plus petite longueur (p. 238). L'élève n'est pas guidé d'emblée dans une stratégie unique, mais au contraire il peut faire des essais personnels, se tromper, ajuster sa première proposition, mettre en place des contrôles, se rendre compte qu'il est bloqué… Les conceptions des élèves, justes ou erronées, sont ainsi au cœur du travail.
Pour que tous les élèves puissent s'engager seuls dans le travail, ne serait-ce qu'un petit peu, nous nous assurons que l'exercice choisi peut être amorcé avec les connaissances des années antérieures ou celles qui ont déjà été travaillées précédemment et qui sont maîtrisées par tous ou presque.
En outre, nous essayons de choisir des exercices qui vont permettre d'établir d'emblée des liens entre le nouveau savoir et d'autres plus anciens.

Dans un exercice de découverte, nous marquons quatre temps dans la classe.

1. Les élèves explorent d'abord très librement et individuellement la situation proposée. Ils sont confrontés à une difficulté au cours de leur travail et essaient de la surmonter en inventant de nouvelles stratégies, en adaptant d'anciens outils…
2. Deux cas se présentent alors :
   - les élèves franchissent l'obstacle en construisant eux-mêmes le nouveau savoir, collectivement, avec des aides éventuelles – c'est le cas de l'exercice des trois villes ;
   - les élèves franchissent l'obstacle de façon coûteuse en utilisant leurs outils habituels, ou bien ils ont essayé tous leurs outils sans succès et restent bloqués devant l'obstacle, comme dans l'exercice de la plus petite longueur – nous exposons alors de façon magistrale le nouveau savoir à essayer, et proposons ensuite immédiatement un temps d'appropriation suffisant.
3. En clôture du travail de découverte, les élèves expriment avec leurs mots ce qu'ils ont trouvé collectivement, et deux nouveaux cas se présentent alors :
   - les élèves ont pu apporter la preuve de ce qu'ils avancent – pour terminer, nous avons juste à marquer ce moment dans la classe de façon un peu solennelle ;
   - les élèves en sont restés à une conjecture, soit parce que la preuve ne leur est pas accessible, soit parce que la tâche était un travail de conjecture – nous prenons alors position magistralement pour clore : « Ce que vous avez découvert, la communauté mathématique l'a démontré. » ou « Nous pourrions démontrer ensemble que cette conjecture est vraie mais j'ai choisi de ne pas vous le proposer. »
4. Une trace du chemin parcouru est inscrite sur les cahiers de bord sans formalisme excessif, en lien très étroit avec le contexte de l'exercice : le récit des pistes explorées, des pistes abandonnées, l'énoncé dans une ou plusieurs formes « non expertes » de ce qui a été trouvé.

Au cours de ce travail nous veillons à ce que toutes les propositions personnelles des élèves soient explorées, car les liens personnels qu'ils tissent avec le nouveau savoir participent fortement pour eux à la construction du sens. En outre, si leurs conceptions erronées ne sont

pas travaillées à ce stade, elles risquent de faire surface plus tard et de constituer des obstacles plus grands dans des phases plus avancées de l'apprentissage.
Nous accordons aussi beaucoup d'importance aux signes d'angoisse, de découragement ou de colère que nous adressent certains élèves au début du travail, particulièrement en début d'année : « Je ne sais pas quoi faire. », « Je ne comprends rien. », « Il faut nous expliquer. » Nous y répondons, sans prendre position sur le contenu, en les rassurant : « Prends le temps de lire. », « Tu as peut-être besoin d'un peu de temps avant de te lancer. », « Essaie quelque chose même si tu penses que ça ne va pas marcher à coup sûr. », « Va plus loin dans ton idée, tu verras bien, ça va peut-être te donner d'autres idées. » Parfois, il peut nous arriver d'arrêter la classe pour rassurer tout le monde : « Vous êtes en train de construire ou de découvrir quelque chose de nouveau, c'est normal que vous ayez du mal, que ce soit long, que vous vous trompiez… Continuez à essayer des choses pendant 5 min puis nous nous retrouverons pour parler de vos idées et de vos difficultés. » Nous aimerions que les élèves puissent se dire : « Tous les coups sont permis, je peux essayer, tâtonner, conjecturer, c'est normal de ne pas trouver tout de suite, les idées qui ne vont finalement pas marcher ne sont pas inutiles, après on va parler ensemble de tout. »

Il nous semble peu efficace d'essayer de gagner du temps en phase d'élaboration : nous risquons de perdre des élèves et de devoir ensuite consacrer le double de ce temps en remédiation.

Premières utilisations

Quand il émerge, le nouveau savoir est encore en lien étroit avec le contexte de l'exercice d'introduction. Nous proposons alors très vite de petits exercices simples comme celui sur le sport et la musique chez les lycéens (p. 101), parfois de simples doublages de l'exercice de découverte avec d'autres valeurs comme lors des premières utilisations de la deuxième identité remarquable (p. 174). Cela permet à l'élève de prolonger son exploration de la situation tout en éprouvant sa compréhension de ce qui s'est dit au cours de l'exercice de découverte. Ces exercices seront aussi l'occasion pour lui de reformuler ce qui a été découvert, de façon personnelle, toujours en langage-élève. Nous observons que ces exercices contribuent très fortement à la construction du sens en faisant durer une phase où le savoir est encore très personnalisé.
Nous ne demandons pas de rédaction élaborée pour ces premières utilisations. Les élèves peuvent même souvent en rester au stade du raisonnement et du résultat. Le travail se fait sur le cahier de recherche et à l'oral. Le rythme est très enlevé. Il faut faire attention à rassurer et à ne pas stresser les plus lents qui n'y arrivent pas tout de suite et qui vont nous voir intervenir au tableau alors qu'ils n'ont pas fini : « Je sais que certains d'entre vous n'ont pas terminé, nous allons parler des difficultés que vous rencontrez puis vous réessaierez. Vous avez encore du mal, c'est normal puisque nous venons juste d'apprendre quelque chose de nouveau et que vous êtes en train de faire vos premiers essais d'utilisation, ça va venir. On va encore prendre du temps demain et après-demain sur cette question. » L'élève doit pouvoir se dire : « Je suis là pour essayer un nouveau truc, c'est normal que je me trompe beaucoup, ça va aller de mieux en mieux. Il y en a qui ont compris plus vite que moi mais ce n'est pas grave puisque la prof tient compte de moi… » puis : « Ça y est, on a tous compris comment ça marche, je le sais parce que tout le monde a levé le doigt tout à l'heure quand la prof a demandé qui avait réussi. »
À ce stade, le travail individuel ou collectif que nous menons avec les élèves sur les erreurs commises fait systématiquement appel au sens, pas du tout au non-respect de la nouvelle propriété ou règle : cela est facilité par le fait qu'à ce stade, aucun énoncé formel n'est encore rédigé.
Pendant ces premières utilisations, nous faisons des évaluations formatives simples (observation plus fine des élèves en difficulté, sondages, éventuellement avec des logiciels spéciaux) pour savoir à quel moment la classe est prête pour l'institutionnalisation. Ce n'est jamais le bon moment pour tous, il s'agit de trouver le meilleur compromis. Quand nous pensons qu'ils sont prêts, nous demandons parfois aux élèves si ça va pour eux. On peut parier que ce n'est pas le moment idéal pour la formalisation quand trop expriment de l'insécurité ou du désarroi. Nous pouvons aussi demander à quelques élèves plutôt en difficulté d'exprimer ce qu'ils sont en train de faire. Nous avons observé que, mieux nous travaillons pendant la découverte et les premières utilisations, plus les élèves sont rapidement efficaces en phase de prise en main, et moins ils ont besoin de s'entraîner pour réussir.

Un risque à éviter : s'enliser dans les premières utilisations en attendant que les élèves soient au point. À l'issue de ce travail, ils ont seulement fait leur premiers pas en se trompant, en balbutiant… L'entraînement viendra plus tard.

Institutionnalisation

Il s'agit d'obtenir en classe, en lien étroit avec les formulations personnelles des élèves lors des phases précédentes, un énoncé formel décontextualisé, c'est-à-dire détaché de la situation de découverte. Au cours de ce temps d'institutionnalisation, l'énoncé change de statut pour les élèves. Il était d'abord une nouvelle connaissance pour chacun puis un bien commun pour la classe, il devient maintenant plus universel en référence à sa reconnaissance par la communauté mathématique.
Les manuels inscrivent très classiquement ce temps d'institutionnalisation en clôture de l'exercice d'introduction. Nous choisissons de le différer parce que nous trouvons que le sens d'un savoir émergent a tendance à

se perdre quand celui-ci n'a pas été assez durablement en prise directe et personnelle avec ce savoir.

Nous partons toujours de ce qui a été établi par les élèves pendant la découverte et les premières utilisations. Soit nous faisons une intervention magistrale en lien très étroit avec les productions pour exposer le savoir décontextualisé en jeu – dans l'exercice du contrôle antidopage (p. 100), il s'agit juste d'énoncer la formule faisant intervenir $P(A \cup B)$. Soit, comme pour la formule de la distance entre deux points (p. 127), nous proposons aux élèves d'écrire eux-mêmes un énoncé, quelque chose « qui sera dans le cahier de résumés, qui servira les années suivantes, auquel vous ferez appel pour résoudre certains problèmes, que vous devrez savoir énoncer si besoin… ». Pour être validé, un énoncé doit avant tout être décontextualisé, c'est-à-dire ne pas avoir de référence à l'exercice de découverte, et ensuite avoir une forme acceptable. Une fois l'énoncé élaboré par la classe, il est écrit puis encadré solennellement dans les cahiers de bord.

Si nous retardons trop l'institutionnalisation, il arrive que des élèves s'habituent à des démarches informelles qui cèdent ensuite difficilement la place. D'autre part, il est moins aisé d'aider des élèves en difficulté après la phase d'institutionnalisation car les élèves vont alors plus naturellement chercher à appliquer une règle plutôt qu'à convoquer le sens. Nous cherchons donc le meilleur compromis, tout en ayant conscience que ce ne sera pas le meilleur pour tous puisque, sauf exception, la phase d'institutionnalisation intervient au même moment pour tous.

Si, avant la phase d'institutionnalisation, certains élèves n'ont pas eu assez de temps pour expérimenter, éprouver leurs représentations initiales, tester, faire des erreurs, ils risquent de manifester leur désarroi. Plutôt que de réexpliquer, il vaut mieux prévoir une remédiation ultérieure avec eux… et essayer de faire mieux l'année d'après.

PHASE DE PRISE EN MAIN

Maintenant que le savoir a été institutionnalisé, les élèves vont pouvoir s'y référer quand ils l'utilisent : c'est la phase de prise en main. Nous pouvons donner dans cette phase des exercices d'apprentissage d'une technique, prolongés généralement par un travail d'automatisation dans la durée (voir plus bas). Nous donnons aussi en phase de prise en main des exercices nécessitant un raisonnement plus élaboré comme dans l'exercice du terril (p. 137). Ces exercices de prise en main font intervenir des contextes divers pour aider l'élève à mieux percevoir les contours du nouveau savoir, son champ d'application et ses limites ; le savoir continue ainsi à s'y construire. Ils sont plus complexes que ceux qui servent dans les premières utilisations, ce qui justifie un véritable travail de rédaction. Les élèves perçoivent alors la nécessité de la rédaction pour communiquer leur solution aux autres.

Nous étalons ces exercices complexes dans le temps. À proximité de la phase de découverte, ils permettent à l'élève de chercher comment il peut se servir du nouveau savoir dans un contexte donné. À distance, ils lui permettent aussi de découvrir à quoi il peut reconnaître qu'il doit mobiliser ce nouveau savoir. En laissant passer du temps, nous évitons le recours aux mauvais automatismes comme : « Bon, en ce moment c'est les équations produit nul, donc je dois écrire “ … = 0 ou … = 0 ”. », ou les effets modélisants comme : « On a rédigé un truc sur Pythagore hier, je tourne la page de mon cahier et j'essaie de faire pareil ». S'il sèche et ne pense pas au théorème de Pythagore, nous pouvons alors lui dire : « Cherche dans ton cahier de résumés une propriété qui pourrait t'aider. » Pour faire figurer dans le cahier de bord le bilan de ces exercices faits à distance, nous demandons éventuellement aux élèves de réserver une ou deux pages blanches dans ce cahier avant la séquence suivante de cette partie du cahier.

Nous évitons de faire trop d'exercices de prise en main à proximité de la phase d'élaboration quand les élèves sont au point. Passer à autre chose pour y revenir à distance est souvent plus efficace et permet de gagner du temps puisque les élèves auront atteint un niveau supérieur de l'apprentissage avec le même nombre d'exercices.

PHASE D'APPROFONDISSEMENT

Dans cette phase, nous proposons aux élèves des exercices qui les entraînent à reconnaître le champ d'application du nouveau savoir et à le mettre en lien avec d'autres savoirs. Ces exercices contribuent aussi pour chacun à la réorganisation des savoirs anciens avec inclusion de la nouveauté. Par exemple l'exercice des longueurs approchées (voir p. 246) permet de remobiliser la formule de la distance entre deux points ainsi que l'utilisation d'une boucle. La phase d'approfondissement se distingue de la phase de prise en main par le fait que les exercices se font plus à distance, ou sont plus difficiles, ou ne sont pas donnés à tous les élèves.

Nous menons les exercices d'approfondissement à distance, parfois en travail alterné entre la classe et la maison. Ils donnent souvent lieu à des travaux de rédaction sur feuille.

Nos exercices

Exercice, problème, activité, situation-problème ? Ces noms ont des significations diverses d'un manuel à l'autre, d'un professeur à l'autre. Dans cette première

partie, nous n'utilisons que le mot «exercice» qui désigne, pour nous, toute tâche donnée aux élèves.
Nous passons beaucoup de temps sur certains exercices, notamment des exercices de recherche. Au final, nous faisons moins d'exercices que beaucoup de nos collègues.

HISTOIRE DES EXERCICES DE CE LIVRE

À partir d'un objectif d'apprentissage, nous recherchons une idée dans les brochures IREM, les manuels, sur Internet, lors de conversations de salle des profs, dans l'histoire des mathématiques ou avec notre propre imagination. Nous ne visons pas l'originalité car des questions banales peuvent très bien fournir de véritables occasions de faire des mathématiques, et intéresser l'élève si nous lui laissons suffisamment d'espace et de temps, sans lui suggérer a priori de méthode experte. C'est le cas par exemple de la recherche de la formule de la distance entre deux points (p. 127).
Nous travaillons ensuite l'énoncé pour l'adapter à nos objectifs en contrôlant systématiquement les prérequis, son degré d'ouverture, sa position par rapport au programme et la place qu'il réserve aux élèves les plus fragiles.
Nous allons en classe avec la première mouture, aussi ouverte que possible. Parfois, elle nous déçoit, mais nous évitons alors de nous débarrasser de l'exercice trop vite. L'observation fine du travail des élèves de plusieurs classes nous permet en général de le faire évoluer pour le rendre plus efficace. Le problème peut venir d'un obstacle parasite, de la mauvaise position de l'exercice dans la progression de l'année, d'une consigne ambiguë, d'un environnement qui ne parle pas aux élèves, etc. Nous le modifions et obtenons alors une seconde version, qui évoluera à son tour, et ainsi de suite jusqu'au moment où l'exercice remplit pleinement son rôle dans l'apprentissage.
Il voyage alors un peu de classe en classe jusqu'au moment où nous n'avons plus assez de curiosité pour le faire vivre avec suffisamment de fraîcheur. Il s'est usé pour nous. Nous en cherchons un autre.

COMMENT RÉDIGEONS-NOUS LES EXERCICES ?

– Nous préférons « Quelle est la nature du triangle *ABC* ? » à « Montrez que *ABC* est un triangle rectangle en *A*. » Nous préférons « Qu'en pensez-vous ? » à « Démontrez ceci ou cela. » C'est une façon simple d'ouvrir les questions.
– Nous n'hésitons pas à proposer aussi des énoncés avec des données manquantes ou au contraire inutiles, des énoncés trompeurs comme celui de l'exercice de la dernière chance (p. 93).
– Nous n'écrivons pas « Justifiez la réponse » car en mathématiques, sauf mention contraire, on doit toujours justifier sa réponse.
– Nous traquons les obstacles liés à la langue. Cela ne veut pas dire que nous utilisons un faible niveau de langue, mais nous soignons l'expression et nous nous assurons toujours qu'un énoncé un peu difficile soit compris par les élèves. Il suffit pour cela, quand ils ont tous eu le temps de le lire, de leur demander de le cacher et de raconter à l'oral ce qu'ils en ont compris. Nous pouvons alors animer un débat autour des désaccords et reprendre certains points de langue avec eux.
– Nous soignons les environnements parce qu'un élève peut avoir plus de plaisir à résoudre un exercice « bien habillé », et qu'un habillage trop éloigné du quotidien de l'élève peut constituer un obstacle. Néanmoins, nous ne faisons pas de l'habillage une obligation et proposons beaucoup d'exercices intra-mathématiques qui ne nécessitent pas de modélisation.

SÉLECTION DES EXERCICES PENDANT L'ANNÉE

Dans les préparations de séquence, l'apprentissage est développé de façon maximale et il n'est en général pas possible de donner tous les exercices prévus. Pour chaque classe, nous opérons des choix en cherchant les compromis qui permettent de ne rien négliger dans le programme en tenant compte du niveau des élèves, de l'hétérogénéité de la classe, du temps dont nous disposons et de notre volonté de ne laisser aucun élève sur le bord de la route.
Les exercices préparatoires et les exercices de découverte sont incontournables. En revanche, le nombre des exercices de première utilisation, de prise en main et d'approfondissement proposés dépend du rythme d'apprentissage de la classe et de chaque élève.
Il est plus facile d'opérer des choix dans les exercices de prise en main et d'approfondissement, d'autant plus que leur nombre peut être différencié d'un élève à l'autre, et que certains peuvent être donnés à faire à la maison.
C'est davantage le temps disponible qui va nous guider dans nos prises de décision. En outre, nous pouvons choisir, par exemple, de faire peu d'exercices de prise en main sur les opérations sur les inégalités dans la séquence F3 (voir p. 237) car nous savons que nous allons compenser en faisant beaucoup appel à ces opérations dans la séquence Inéquations (non traitée dans l'ouvrage) qui viendra peu après.
Quand nous mettons de côté un ou plusieurs exercices, nous essayons d'en rendre positives les conséquences : « Je m'arrangerai pour qu'il y ait des compensations dans d'autres séquences. » ou « Je reviendrai à ces exercices plus tard. »

Exercices de recherche

Nous entendons par « exercice de recherche » non pas un exercice qui fait appel à un raisonnement complexe, mais plus simplement tout exercice dont la résolution n'est pas purement technique. Pour nous, il n'y a pas d'un côté de petits exercices et de l'autre de beaux problèmes dits « de recherche », mais seulement des exercices de recherche, si petits soient-ils, qui sont l'occasion de véritables raisonnements, simples pour certains élèves, moins pour d'autres.

PETITES MARCHES OU QUESTION GLOBALE OUVERTE ?

On rencontre souvent, dans les manuels par exemple, des exercices où l'élève est confronté à une liste de questions qui visent à l'emmener petit à petit, étape par étape, sur le chemin balisé de la solution experte. En voici un exemple (voir encadré ci-dessous).
Le rédacteur de l'énoncé n'a-t-il pas fait la partie la plus intéressante du travail à la place de l'élève ? À travers des petites marches, il lui donne la méthode pour déterminer le maximum de l'aire alors que l'élève peut être capable de la trouver lui-même ou au moins de comprendre la question et d'y réfléchir ! L'existence même de ces marches et le fait qu'elles aient la même hauteur pour tous rend le travail moins intéressant et nuit à la différenciation. D'autre part, combien d'élèves auront suffisamment de recul pour comprendre que le but des trois premières questions est de résoudre la quatrième ? À nos yeux, un gros inconvénient de ces petites marches est que pour beaucoup d'élèves l'escalier ne sera jamais éclairé dans son ensemble car ils n'auront pas eu l'occasion d'envisager le problème globalement. En haut de la p. 31 se trouve notre exercice du jardin potager (voir aussi p. 233). Ici, les élèves se demandent comment calculer l'aire du potager, ils peuvent tâtonner, modéliser, utiliser le traceur de courbe ou l'éditeur de tableau de valeurs de la calculatrice. Plusieurs procédures sont possibles, donc le travail en équipes sera l'occasion pour chacun d'essayer de comprendre la démarche d'un camarade, de comparer les démarches. Une telle question laisse une grande place à l'activité de l'élève et à l'expérimentation, permet la coexistence de stratégies diverses s'enrichissant les unes les autres, développe l'imagination, l'inventivité, la capacité à prendre des initiatives… Elle permet aussi de consacrer un temps important au travail de conjecture. C'est le lieu d'une véritable activité mathématique, où l'élève développe des attitudes essentielles face à la résolution d'un problème. En outre, les élèves en difficulté y sont souvent plus facilement acteurs que dans d'autres types de travaux.

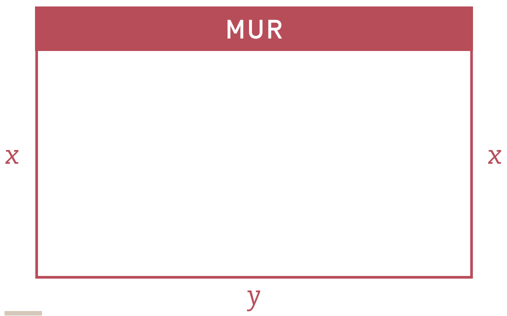
COMMENT ACCOMPAGNER LE TRAVAIL AUTOUR D'UNE QUESTION OUVERTE ?

Ouvrir ne suffit pas ! Les questions ouvertes nécessitent des mises en œuvre spécifiques car il faut faire cohabiter des élèves aux rythmes et aux stratégies très divers. Le travail en équipes est particulièrement adapté pour faire vivre les questions ouvertes de façon fructueuse pour tous.

> Les élèves s'engageront d'autant plus facilement dans une question ouverte qu'ils vous sentiront confiant dans le fait qu'ils vont démarrer.
> À la moindre crainte ressentie chez vous, ils sauront vous soutirer des aides dont ils auraient pu se passer.

Quand le travail est amorcé à partir d'une question ouverte, nous organisons parfois une plénière de régulation (voir p. 41) pour mutualiser les difficultés, faire émerger les premières pistes ou donner de nouvelles consignes telles que : « Écrivez une trace de votre argumentation sur le cahier de recherche pour pouvoir l'énoncer à l'oral devant la classe. » ou : « Faites un plan de la démonstration. » Ces consignes permettent à l'élève d'identifier ce qu'est l'activité mathématique, d'apprendre à organiser son travail de recherche. Elles valorisent aussi les

Exercice trouvé dans un manuel



Source : Manuel collaboratif, *Maths 2de*, Paris, © Sésamaths/Magnard, 2014, p. 132.

Contre le mur de sa grange, un fermier veut construire un enclos grillagé rectangulaire suivant le schéma ci-contre. Le 4e côté est une partie du mur. Il dispose pour cela de 40 m de grillage pour clore trois côtés du rectangle et obtenir un enclos d'aire maximale.

1] Montrer que l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x est égale à $A(x) = -2x^2 + 40x$.
2] Tracer la courbe de la fonction A à la calculatrice sur l'intervalle [0 ; 20].
3] En déduire le tableau de variations de la fonction A.
4] Montrer que $A(x)$ est maximale lorsque la longueur est égale au double de sa largeur.
5] À l'aide de la calculatrice, donner l'ensemble des nombres x pour lesquels $A(x) \leq 72$.

Notre exercice

M. Legoff souhaite utiliser les 35 m de grillage dont il dispose pour délimiter un jardin potager rectangulaire. Pour que le potager puisse être plus grand, il utilise son mur pour délimiter un des côtés du rectangle. Ainsi, le grillage servira uniquement pour les trois autres côtés.
Il veut que la surface du potager soit la plus grande possible. Comment peut-il s'y prendre ?

produits intermédiaires qui mènent éventuellement à une rédaction finale. Trop souvent l'élève qui n'arrive pas seul au produit fini se considère en échec. Il peut ainsi mieux mesurer ce qu'il a réussi. Ainsi, progressivement, l'élève découpe lui-même son travail en tâches intermédiaires. Il fabrique de petites marches adaptées à son pas, redescend l'escalier pour en fabriquer un autre plus loin…

> Si vous n'avez pas l'habitude des questions ouvertes et que vous craignez, par exemple, que les élèves ne démarrent pas, vous pouvez vous dire qu'à tout moment vous pourrez refermer un peu, beaucoup ou complètement, si vous vous sentez en danger de perdre la classe : il suffira de fournir des aides plus ou moins importantes.

Acquisition d'automatismes

Pour le neuroscientifique Stanislas Dehaene, l'automatisation est un des quatre piliers de l'apprentissage. Le programme du cycle 4 indique que l'élève doit « disposer d'automatismes (corpus de connaissances et de procédures automatisées immédiatement disponibles en mémoire) ». Il ne s'agit donc pas seulement d'entraîner les élèves en calcul mais aussi de les conduire progressivement à automatiser certaines tâches liées au savoir en construction. Par exemple, en phase de prise en main de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, des élèves reviennent souvent à la formule de la double distributivité. Or le développement à l'aide de cette identité remarquable doit s'émanciper de la double distributivité pour devenir un véritable outil, pour la factorisation par exemple. Plus généralement, l'élève qui aura automatisé cette technique l'aura rendue plus disponible pour résoudre des problèmes complexes.
Nous menons l'élaboration d'une technique de manière progressive, dans la durée. Au début, les exercices d'apprentissage d'une technique sont menés comme des exercices de recherche, comme dans les derniers « vrai ou faux » (p. 174 et 175). Les exercices donnés sont de difficulté croissante et nous ne cumulons pas les obstacles. Les élèves construisent les techniques collectivement en se demandant à chaque obstacle comment ils pourraient s'y prendre, pourquoi telle méthode n'est pas opérante, comment ils pourraient venir à bout de tel cas particulier, en comparant leurs procédures… Ils recherchent les justifications de leurs propositions dans le travail sur le sens qui fonde la technique en jeu. Petit à petit, ils gagnent en efficacité et la technique commence très doucement à s'émanciper du sens pour devenir un automatisme. Le recours au sens devient moins fréquent. Pour nous, sens et technique ne s'opposent pas : le savoir continue à se construire à travers des exercices techniques et l'acquisition d'automatismes.
Nous essayons d'éviter les automatismes détachés prématurément du sens, car l'expérience nous montre que les élèves les oublient vite. Leur volonté de réussite immédiate les pousse à rechercher les techniques opérantes qu'ils pensent être les réponses les plus rapides à leur souci d'efficacité. Ils sont alors trop vite dans l'élaboration naturelle d'automatismes et nous devons parfois contrecarrer un peu ce naturel. Ainsi, en cas d'erreur de développement de $(x+4)^2$, alors que nous laissons un élève très à l'aise en recherche d'automatisme se référer à la règle, nous incitons un élève en difficulté à plutôt revenir au sens à l'aide de l'interprétation géométrique ou de la double distributivité.
La différenciation dans l'apprentissage d'une technique est donc primordiale. Pendant que certains travaillent encore sur des exercices techniques élémentaires, nous donnons à d'autres des exercices plus difficiles. Par exemple, pour atteindre cet objectif lors des entraînements de calcul littéral à la maison, nous utilisons le protocole allers-retours (voir p. 45), qui est très adapté.
Enfin, pour permettre à chacun de progresser dans la technique à son rythme et de mettre en place des automatismes, nous prolongeons l'apprentissage de la technique par ce que nous appelons une automatisation dans la durée.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

De nombreux apprentissages doivent déboucher sur une technique : développer et réduire une expression littérale, calculer les coordonnées du milieu d'un segment, déterminer l'équation d'une droite, etc. Cette technique s'élabore progressivement d'abord dans des exercices de recherche, puis se développe au sein d'exercices d'entraînement qui deviennent progressivement techniques. Pour rester disponible pour chacun, elle nécessite un entraînement régulier tout au long de l'année. Quand « Automatisation dans la durée » apparaît dans le texte d'une séquence, cela signifie que nous prenons bonne note que des exercices du type en question doivent être donnés régulièrement en n'y consacrant que quelques minutes, d'abord pendant quelques-unes des séances suivantes, puis ponctuellement ici et là tout au long de l'année en espaçant progressivement les entraînements.

> Consacrer plus de quelques minutes à un entraînement technique pour aider des élèves en difficulté, ou parce qu'on se rend compte qu'on est allé trop vite auparavant, peut-être tentant. Cependant l'acharnement à un moment donné est souvent moins payant que de revenir sur la question à petites touches.

Les élèves utilisent le cahier de recherche et ne conservent pas de traces sur le cahier de bord. En général, cet entraînement nourrit les rituels de début de séance. Il peut aussi être proposé à d'autres moments, à la fin d'un cours s'il ne reste que 5 min, quelques jours avant un devoir pour que les élèves identifient leurs lacunes, ou aussi à la maison.

> Faire une liste des entraînements techniques qu'il faut encore poursuivre peut permettre d'éviter des oublis.

Résolution et rédaction

Nous faisons systématiquement travailler la résolution d'un exercice et sa rédaction séparément. Nos consignes indiquent très explicitement qu'aucune rédaction n'est attendue dans la phase de résolution. En début d'année, les élèves ont parfois du mal à produire sans rédiger directement. Il est souvent nécessaire de réhabiliter à leurs yeux le brouillon, la notion d'écrits intermédiaires, de plan de travail. Pour amener chacun à se lancer, nous consacrons, par exemple, une partie du tableau à l'élaboration de productions collectives intermédiaires évolutives qui leur servent de point d'appui pour ensuite rédiger, comme dans l'exercice des deux projetés orthogonaux (p. 106). D'autre part, nous étudions en classe entière des productions intermédiaires, même très inabouties : calculs seuls comme dans l'exercice des deux programmes de calcul (p. 157), croquis pour comprendre un exercice, idées ou plan de démonstration, etc. Les élèves s'emparent ainsi progressivement de nouveaux espaces de liberté d'écriture.
Pour la rédaction, nous nous appuyons sur les textes en écriture naturelle des élèves. Ce travail est motivé par le souci de bien communiquer ce qu'ils ont fait à leurs camarades. C'est parce qu'ils ont envie de se faire comprendre de leurs camarades que les élèves sont sensibles à leurs critiques et font des efforts. Ils savent très bien que le professeur est capable de les comprendre à demi-mot ; nous ne sommes donc pas les meilleurs interlocuteurs pour l'apprentissage. Les textes sont donc soumis à la critique entre pairs. Le débat permet de faire émerger progressivement les critères d'une rédaction performante sans pour autant modéliser le travail. Nous avons à cœur de mettre en évidence la diversité des textes qui sont conformes aux critères élaborés collectivement ; ainsi, il n'est pas rare que plusieurs textes soient collés sur les cahiers de bord comme traces du travail de rédaction (voir p. 109).

> Certains élèves sont à la recherche de modèles de rédaction rassurants. Lutter contre cette tendance en évitant de leur fournir, même sans le vouloir, les pseudo-modèles qu'ils attendent, demande une grande vigilance. Ils peuvent alors développer leur capacité de réflexion et s'interroger sur le sens de l'acte de rédiger.

Histoire des mathématiques

L'histoire des mathématiques nous guide parfois du point de vue didactique en nous donnant des indications sur les difficultés que les élèves peuvent rencontrer. Si l'humanité a mis des siècles à élaborer un concept, on peut comprendre qu'un certain temps soit nécessaire aux élèves pour l'assimiler. C'est le cas par exemple de la désignation des variables et des inconnues par les lettres x, y… et c'est pour cela que nous proposons souvent des problèmes qui permettent de retravailler le sens du calcul littéral.
Nous nous inspirons parfois de problèmes historiques pour créer nos exercices. L'exercice des lynx et des lièvres (voir p. 221) est inspiré du travail de Volterra sur le modèle proies-prédateurs. L'intérêt des problèmes historiques peut être trouvé non seulement dans le contenu purement mathématique qu'ils portent, mais aussi dans l'évocation des modalités des découvertes ou des postures des protagonistes.
Quand nous le pouvons, nous incluons dans nos séquences des petits temps où nous parlons de mathématiciennes et de mathématiciens, ainsi que des liens entre leur travail et le sujet du jour. C'est une parenthèse agréable, en particulier pour les élèves en difficulté.
Le travail sur l'histoire des mathématiques permet en outre d'aiguiser le sens critique des élèves car, dans ce domaine, il faut faire très attention à la fiabilité des sources. Par exemple, de nombreuses sources attribuent l'invention de la méthode des coordonnées à Descartes, alors qu'il n'a jamais utilisé de quadrillage (voir p. 124).

CHAPITRE 6

Une séance, de la préparation au bilan

Préparation d'une séance

Pour préparer une séance, nous regardons notre tableau de progression (voir p. 22) et nos textes de préparation des séquences en cours. Nous avons toujours deux séquences prioritaires menées en parallèle : la première qui est en phase d'élaboration ou de début de prise en main, la seconde qui est en phase de prise en main. C'est la première qui donne le rythme car un nouveau savoir est en train de s'y construire. Chaque fois que c'est possible, nous intercalons des exercices de la seconde, ou bien des exercices de prise en main à distance ou d'approfondissement d'anciennes séquences, ou bien des exercices de préparation de séquences à venir.

S'il est prévu au cours de la séance de revenir sur un exercice après une interruption un peu longue, nous prévoyons un protocole spécial pour permettre aux élèves de se remettre dans le bain : lecture silencieuse du cahier de bord ou du cahier de recherche, récit collectif de l'état des travaux, rappel par le professeur d'un fait marquant accompagné d'une tâche qui n'est qu'un prétexte pour se replonger dans l'exercice, etc.
Une fois défini le contenu du travail de la séance, nous repérons les exercices qui risquent d'être faits vite par certains et lentement par d'autres, et pour ne pas bousculer les plus lents, nous prévoyons à l'avance du travail supplémentaire pour les plus rapides.

Exemple

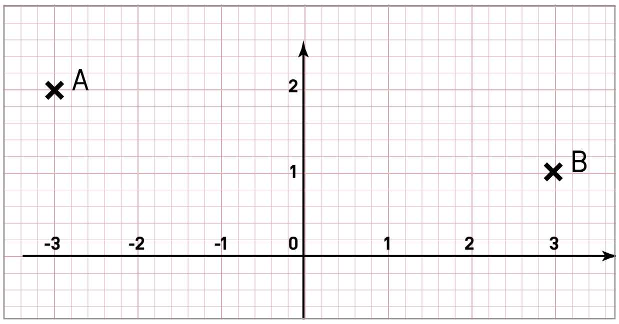
Voilà la réflexion que nous pourrions mener pour préparer nos premières séances de l'année. D'après le tableau p. 22, nous pourrions commencer par S1, G1 ou CL1. Nous avons comme principe de débuter par un apprentissage qui mette en réussite tous les élèves, donc nous excluons CL1 car la notion de variable risque de poser problème. Nous choisissons S1 car cela permettra d'alimenter les rituels de début de séance avec des calculs liés aux fréquences. Nous gardons à l'esprit que le deuxième exercice de G1 – l'exercice des deux projetés orthogonaux – doit être fait à cheval sur trois morceaux de séances consécutives en raison des documents à confectionner entre deux séances, ce qui rend l'organisation des premières séances plus compliquée que d'habitude.

- Séances 1 et 2 (chacune de nos séances dure 55 min) : exercice des lancers francs – les deux parties – et remplissage du tableau de pourcentages. S'il reste du temps, exercices « d'automatisation ». En début de la séance 2, deux exercices d'automatisation ainsi qu'un défi sur les fréquences ou sur un autre sujet ne nécessitant pas de connaissance particulière (voir en ligne notre fichier Défis). Travail à la maison : exercice du baccalauréat pour la séance 3, apprendre par cœur le tableau de pourcentages pour la séance 4.
- Séance 3 : début de séance similaire à celui de la séance 2, puis bilan de l'exercice du baccalauréat. Devoir à la maison pour la séance 7 (avec première option pour les aides intermédiaires, voir p. 45) : exercice des bulletins blancs. Désormais, la séquence G1 donne le rythme : exercice des trois villes, puis distribution des deux résumés de S1 et du premier de G1.
- Séance 4 : le début de séance est rapide (5 min au total) car la séance est chargée. Début de l'exercice des deux projetés orthogonaux, jusqu'à l'écriture du plan de la démonstration au tableau. Distribution du résumé sur les deux géométries. Travail à la maison pour la séance 5 : répondre par écrit à la question suivante : « En géométrie abstraite, à quoi peut servir une figure et à quoi ne peut pas servir une figure ? » Interrogation orale formative de quelques minutes sur le tableau de pourcentage. S'il reste du temps, exercices d'automatisation ou démonstration de $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
- Séances suivantes : la priorité est de finir l'exercice des deux projetés orthogonaux, ce qui devrait prendre une bonne partie des séances 5 et 6, puis d'enchaîner avec la suite de G1 qui donne toujours le rythme. L'exercice du radar peut être commencé en parallèle, mais il n'y a aucune urgence à faire cet exercice. Il faudra aussi penser à la démonstration de $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Rituel de début de séance

En début de séance, nous proposons presque systématiquement aux élèves des exercices courts, en général techniques, à faire individuellement sur le cahier de recherche. Plénière de synthèse comprise, ce travail ne dure pas plus de 10 min, parfois beaucoup moins quand nous pensons avoir besoin d'une séance quasi complète pour un travail.
Ce rituel dynamise la mise au travail car les élèves savent d'emblée ce qu'ils ont à faire en entrant en classe : prendre leur cahier de recherche et faire les exercices. Nous nous contentons de donner les exercices (écrits ou projetés au tableau) et de leur demander de travailler ; le fait qu'ils s'assoient et se taisent est alors une conséquence de la mise au travail, pas un préalable difficile à obtenir à vide. Pendant que les élèves travaillent, nous nous concentrons sur la séance, regardons ce que font les élèves et aidons ceux qui en ont besoin.
Les exercices techniques donnés doivent être sans obstacle majeur pour la plupart des élèves. Ils n'ont pas forcément de lien avec le reste de la séance. Lors d'un même début de séance, plusieurs techniques peuvent être abordées. Nous pouvons travailler à l'acquisition d'automatismes, réactiver des savoirs anciens, faire réciter par écrit des définitions ou des propriétés, etc. De façon plus rare, nous demandons aux élèves de lister tout ce qu'ils ont appris lors des deux dernières semaines : cela contribue, entre autres, à l'organisation des nouvelles connaissances au sein des anciennes.
Le contenu de ces débuts de séance peut être différencié. Par exemple, des calculs peuvent être faits de tête par ceux qui les maîtrisent, tandis que les autres prennent un papier et un crayon pour des traces intermédiaires. De plus, nous proposons presque toujours en dernier un « défi », plus difficile. Seuls ceux qui ont fait les autres questions le traitent. Il n'est pas corrigé, nous nous contentons de féliciter ceux qui ont trouvé et de renvoyer vers eux ceux qui sont frustrés de ne pas avoir la solution.
Nous préparons les questions à l'avance, les projetons ou les écrivons au tableau, éventuellement avant le début de la séance pour pouvoir surveiller la mise au travail. Les élèves ont pour consigne de ne pas recopier l'énoncé et de ne pas rédiger.
L'exploitation du travail n'a rien à voir avec ce qui est mené pour les autres exercices car elle est très brève. Les différents résultats trouvés sont listés au tableau puis les erreurs sont travaillées. Tous les élèves ne sont pas sollicités. Il arrive même que nous profitions de cet

Exemple



1. Soit $A(-3;2)$ et $B(3;1)$. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?
2. Développer et réduire $3+2(4x-3)$ où x désigne un nombre quelconque.

Défi : Sans calculatrice, simplifier $\sqrt{3\times\sqrt{3\times\sqrt{3\times\sqrt{3\times 3}}}}$

Pendant le travail individuel, nous avons remarqué que Edona s'était contentée d'une lecture graphique pour le *1.* et en avons parlé avec elle.
Le rythme de la plénière est très enlevé.
Nous : « Edona, d'après la figure, quelles sont les coordonnées du milieu ? »
Edona : « 1,5 et 0. »
Nous : « Oui, enfin plutôt 0 et 1,5 car il faut donner l'abscisse en premier. On s'arrête là pour la question *1.* ? »
Edona : « Non, c'est de la géométrie abstraite. Il faut faire des calculs. »
Ensuite nous projetons le cahier de recherche de Lucien qui a écrit $\frac{A+B}{2}=\frac{(-3;2)+(3;1)}{2}=\ldots$
Nous : « Qu'en pensez-vous ? »
Clément : « C'est bien. »
Irène : « Non, ça va pas. Il faut calculer séparément l'abscisse et l'ordonnée. »
Nous projetons alors le cahier d'Irène et soumettons ses calculs à la critique. Nous clôturons l'exercice par un sondage.
Nous : « Qu'avez vous trouvé au *2.* ? Aïssatou ? Qui a trouvé autre chose ? »
Trois résultats sont écrits au tableau : $8x$; $20x-15$; $-3+8x$.
Nous interrogeons les auteurs un par un sur leur démarche.
Nous : « D'après vous, quelles erreurs ont été commises ? »
Kilian : « Dans $20x-15$, il a commencé par l'addition. »
Nous : « Qui a commencé par l'addition ? » (sondage pour évaluer l'état des connaissances dans la classe et savoir s'ils sont capables d'identifier leur erreur).
Nous : « Eva (une élève qui s'est trompée), peux-tu dire pourquoi c'est une erreur ? »
Eva : « J'avais oublié qu'il faut faire les multiplications avant les additions mais je le sais. »
Nous : « Je pense que ceux qui ont trouvé $20x-15$ ont commencé par l'addition comme Rémi. Il fallait développer d'abord, comme Léna. Bravo à ceux qui ont trouvé $-3+8x$ ou $8x-3$! Qui a trouvé autre chose et n'a pas compris son erreur ? (Karine seulement). Karine, je passerai te voir tout à l'heure. »
Nous : « Qui a trouvé 3 pour la question défi ? Bravo ! »

espace pour faire de petites interventions directes très magistrales à partir des réponses des élèves (un rappel, un conseil…). Les erreurs sur les cahiers de recherche ne sont pas forcément corrigées par leurs auteurs sauf s'ils le souhaitent et le font vite. Aucune trace n'est laissée en bilan sur le cahier de bord.
Ces rituels permettent d'introduire du temps d'assimilation en faisant durer les apprentissages, sans y consacrer au total davantage de temps, et parfois de préparer de futurs apprentissages. Il est facile d'y opérer des sondages pour évaluer l'état des connaissances dans la classe en demandant simplement, par exemple, qui a réussi. Ces sondages permettent de piloter les apprentissages : par exemple, si tous les élèves ou presque sont capables de calculer un coefficient directeur, on pourra commencer un nouveau chantier. Ces petits exercices permettent aussi aux élèves d'évaluer où ils en sont.

Reste de la séance

Une fois le rituel de début de séance terminé, nous informons les élèves très précisément sur ce qui va se passer ensuite. C'est important car plusieurs apprentissages sont menés de front, et les élèves doivent se sentir en confiance dans cette organisation complexe. Nous disons par exemple : « Aujourd'hui, vous allez découvrir quelque chose de nouveau. » ou « Vous allez vous entraîner à résoudre des équations du second degré. », etc. Ils sauront ainsi quelles sont les règles du jeu du moment.
En général, nous abordons un ou deux sujets, pas plus. La séance est prévue en détail, mais nous avons des décisions à prendre à chaud (comme nous menons plusieurs apprentissages de front, nous pouvons piloter finement entre prévisions et vécu et être vraiment à l'écoute des besoins de la classe) :
- des erreurs sont commises et nécessitent une prise en charge spécifique : nous différons la plénière et préparons un document adapté pour la séance suivante ;
- l'entraînement de début de séance montre que les élèves ne sont pas très à l'aise sur un point précis : nous différons la suite du travail qui nécessite la maîtrise de ce point ;
- le débat au cours de la plénière de synthèse est très riche, l'écoute est très bonne : nous différons l'écriture du bilan sur le cahier de bord pour profiter plus longuement des échanges ;
- les élèves sont dans de mauvaises dispositions (fatigue de fin de semaine, dispute à l'interclasse) : nous reportons le démarrage d'un apprentissage difficile pour plutôt proposer un exercice de prise en main plus ludique sur un autre apprentissage ;
- c'est la veille d'un long week-end, la sonnerie est proche et nous nous rendons compte un peu tard que l'exercice en cours ne peut pas être terminé après une longue coupure : nous décidons d'écourter la concertation en équipes pour avoir le temps de faire le bilan en plénière ;
- un élève est en difficulté : nous décidons de restreindre son travail.

> Nous évitons de suivre de trop près notre préparation. L'observation des élèves est le meilleur guide pour prendre de bonnes décisions en classe, notamment en ce qui concerne le temps à consacrer à une tâche : faut-il déployer ? faut-il comprimer ?

Il arrive qu'au cours d'une même séance, nous abordions plusieurs exercices d'une même séquence. Si des élèves finissent rapidement un exercice, nous ne les autorisons en général pas à se lancer dans l'exercice suivant et leur donnons plutôt un travail supplémentaire. En effet, la synthèse en plénière du premier exercice permet très souvent à chacun d'identifier ce qui doit être retenu pour la suite de l'apprentissage et est donc nécessaire pour l'exercice suivant. Néanmoins, cette règle a des exceptions. En phase de fin de prise en main par exemple, les élèves les plus rapides peuvent travailler sur des exercices que les autres élèves n'aborderont pas. Il peut arriver aussi qu'on permette à des élèves très à l'aise de démarrer en avance le travail sur une question difficile très ouverte pour qu'ils bénéficient d'un temps long de recherche individuel : les autres élèves seront moins longtemps livrés à eux-mêmes sans aucune aide.

Bilan après une séance

Systématiquement, après chaque séance, nous faisons le point pour évaluer ce qui s'est passé et adapter les séances suivantes. Les questions varient d'une séance à l'autre.
- Combien d'élèves sont restés en difficulté ?
- Peut-on avancer sur le nouvel apprentissage ou est-il préférable de prolonger un peu les premières prises en main pour donner un temps plus long d'assimilation aux élèves les plus fragiles ?
- Doit-on retravailler dès la séance suivante sur les difficultés rencontrées ou est-il préférable d'y revenir à l'occasion d'un autre apprentissage ?
- Les élèves fragiles pourront-ils travailler leurs difficultés au sein de l'exercice suivant ou faut-il prévoir une remédiation avant ?
- Comment différencier la prochaine séance pour pouvoir mieux accompagner les élèves qui sont restés en difficulté sans ralentir les autres ?
- Est-il temps de passer à la phase d'institutionnalisation ?
- Personne n'a soulevé tel aspect du problème aujourd'hui : dans quel futur exercice pourrons-nous le faire ?

Les réponses que nous apportons à toutes ces questions sont en tension entre les besoins de chacun et la nécessité de garder un groupe uni, entre notre volonté d'aider les plus fragiles sans ralentir les plus rapides et notre engagement à couvrir le programme. Les décisions que nous prenons sont le résultat de compromis qui nécessitent de nombreux deuils. Nous ne réussissons jamais à faire tout ce que nous voudrions pour chacun : nous faisons seulement ce que nous pouvons.

Gestion des productions écrites sur feuille

Notre pratique donne une large place aux productions écrites et nous avons souvent à les gérer d'une séance à l'autre. Très classiquement, un professeur qui a des copies dans son cartable a le projet de les corriger. Ce n'est pas notre cas : nous n'annotons pas systématiquement les productions relevées, qu'elles soient individuelles ou collectives. Dans notre gestion des copies, deux paramètres interviennent : le projet de synthèse du travail et le retour individuel prévu.

Préparer une synthèse telle que nous la concevons nécessite de prendre d'abord connaissance des copies sans les annoter pour pouvoir en extraire d'éventuels passages vierges de nos commentaires. Après une simple lecture de leur ensemble, nous décidons dans un second temps du devenir des copies en fonction de notre objectif initial et de leur contenu effectif. Par exemple :

– rendre les copies et organiser des équipes autour d'erreurs particulières ;
– proposer de nouveaux exercices à ceux qui ont réussi et un travail sur leurs erreurs aux autres ;
– prévoir une plénière de régulation pour évoquer les erreurs trouvées dans les copies et demander une seconde version améliorée à tous, ou à certains seulement, comme dans l'exercice du cycliste (p. 218) ;
– nous limiter au travail collectif de synthèse.

La nature de nos éventuelles annotations est donc très variable. Nous pouvons annoter de façon détaillée pour relever les erreurs et donner des conseils à l'auteur, comme dans l'exercice du cycliste, ou au contraire très sommairement pour indiquer les passages à retravailler, voire pas du tout en attendant une seconde version comme dans l'exercice du point mystère (p. 117). Nous pouvons annoter de façon définitive au stylo rouge ou, au contraire, de façon provisoire au crayon à papier. Les annotations au crayon à papier instaurent entre l'élève et nous une petite conversation par écrit qui symbolise le côté provisoire ou intermédiaire de la production : la copie est comme un terrain de rencontre entre nous et l'élève au cours d'une recherche, particulièrement lorsque plusieurs allers-retours sont organisés. Nous remarquons que les élèves en difficulté retravaillent plus volontiers quelque chose que nous n'avons pas encore annoté, ou seulement de manière provisoire. Ils sont motivés lors des plénières de régulation quand ils savent qu'ils auront la possibilité d'améliorer leur premier travail avant qu'il soit annoté. Le regard critique qu'ils portent alors sur leur première copie est très formateur.

Au moment où nous rendons les copies, que ce soit avant ou après le travail de synthèse, nous proposons toujours aux élèves de répondre à leurs questions personnelles, le plus souvent en tête à tête pendant un autre travail.

CHAPITRE 7

Dispositifs de travail pour les élèves

Avant de donner un travail à faire en classe, nous veillons à ce que tous les élèves soient attentifs et donnons la consigne *in extenso* pour ne pas avoir à interrompre leur travail. Nous disons deux choses ;
- le *type de production attendue*, individuelle ou collective, écrite ou orale. S'il s'agit d'une production écrite, nous en précisons le support : cahier de recherche, cahier de bord, feuille simple, production d'équipe, etc. Une production, au sens où nous l'entendons, peut aussi être orale : préparer une intervention en plénière, mutualiser les premières pistes, etc ;
- le *mode de fonctionnement* : sans communication, avec concertation ou avec entraide.

Ce que nous appelons ici « dispositif » est l'association d'un type de production et d'un mode de fonctionnement. Nous considérons le travail à la maison comme un dispositif particulier.

Travail individuel

Un travail individuel consiste en une production individuelle en mode sans communication (voir p. 15). Il permet entre autres :
- de préparer de la matière première dont l'hétérogénéité va enrichir les échanges ultérieurs ;
- de lutter contre l'influence des meneurs dans les futurs débats en équipes ;
- de faire émerger les conceptions initiales de tous les élèves, qu'elles soient justes ou fausses ;
- d'apprendre à l'élève à travailler seul et à prendre des initiatives ;
- de mener des évaluations basées sur l'observation fine des élèves ou de quelques élèves pour mesurer l'état de certaines de leurs connaissances.

Nous utilisons parfois le travail individuel pour redynamiser le débat pendant une plénière un peu longue ou pour rétablir le calme dans la classe ; mais s'il tient une place si importante dans notre pratique, c'est d'abord parce que tout exercice est amorcé par un travail individuel qui permet à chaque élève de s'emparer de la question posée et de commencer les recherches à sa façon.

QUEL EST NOTRE RÔLE PENDANT UN TRAVAIL INDIVIDUEL ?

Avant tout, et particulièrement en début d'année, nous devons rester vigilants quant au respect de la règle de non-communication entre les élèves. Par exemple, lorsque nous aidons un élève, nous ne tournons pas le dos à la classe pour voir au maximum ce qui se passe et donner l'impression que rien ne nous échappe.
Ensuite, il nous faut prendre des informations dans la classe pour savoir, selon les moments (jamais tout à la fois) :
- qui ne démarre pas ;
- comment les élèves démarrent (y a-t-il plusieurs stratégies ? combien ? des conceptions erronées ?) ;
- l'état psychologique des plus fragiles ;
- quelles erreurs sont commises ;
- quels types de difficultés sont rencontrés.

Nous sommes d'autant plus performants dans cette observation que nous anticipons bien ce qui va se passer au moment de la préparation de la séance. En d'autres termes, nous devons savoir ce que nous cherchons. Ces analyses s'enrichissent au fil de nos observations : plus nous avons regardé d'élèves prendre en main un exercice donné, mieux nous pouvons anticiper ce qui va se passer pour d'autres.
Les informations recueillies au cours d'un travail individuel nous permettent de préparer ce qui va suivre, par exemple prévoir les erreurs qui seront travaillées collectivement, ou trouver le bon moment pour interrompre le travail individuel, provisoirement pour une plénière de régulation ou définitivement pour un travail en équipes ou une plénière de synthèse.
Ces informations nous permettent aussi de choisir les élèves à aider (nous choisissons qui aider, les élèves ne nous sollicitent pas). Ces aides individualisées sont précieuses dans l'accompagnement car elles peuvent être adaptées à chaque élève. Avant toute aide sur les contenus, nous nous interrogeons d'abord sur la pertinence d'une approche plus psychologique : par exemple, certains élèves ne démarrent pas parce qu'ils n'osent pas tant qu'ils ne sont pas sûrs qu'ils ont « la » bonne idée. Nous travaillons sur cette posture avec eux, ce qui est plus utile sur le long terme que de donner un coup de pouce sur le contenu. Quand nous intervenons sur les

contenus eux-mêmes en tête-à-tête avec un élève, nous nous laissons guider par quelques principes :
- rassurer ;
- aider l'élève à exprimer sa difficulté ou sa façon de voir les choses est souvent plus efficace qu'une « explication » ;
- résister à l'envie naturelle d'accumuler les explications et de s'acharner sur ce pauvre élève qui n'a plus alors comme moyen pour se sauver que de dire : « Oui, oui, j'ai compris. » ;
- accepter de différer pour y revenir dans d'autres occasions, d'autres contextes, à un moment de plus grande disponibilité intellectuelle de l'élève ;
- revenir au sens.

Ces tête-à-tête nous permettent de faire travailler de façon spécifique sur des notions du collège, quitte à fournir des aides plus fortes sur le reste de l'exercice. Aider individuellement certains élèves permet également d'éviter qu'ils ne soient mis à l'écart lors de la concertation ou de la plénière qui va suivre.

QUEL TEMPS DONNONS-NOUS AUX ÉLÈVES ?

En classe, un travail individuel de 15 min ou plus peut être angoissant pour les élèves en difficulté, cela peut creuser les écarts entre les élèves et rendre compliqué le travail ultérieur en plénière. En outre, il est difficile de suivre les élèves individuellement aussi longtemps. Un travail individuel n'excède donc pas 10 ou 12 min, et nous distinguons grossièrement deux catégories.

Travail individuel très bref (1 ou 2 min) par exemple pour :
- la lecture d'un énoncé avant un travail de reformulation, quand l'énoncé le nécessite (quand, dans une séquence, nous écrivons que « les élèves lisent l'énoncé », nous n'avons pas précisé « travail individuel très bref » mais c'est sous-entendu) comme dans l'exercice du trésor (voir p. 122) ;
- un exercice très court comme dans les différentes questions en bas de la p. 144 ;
- une réflexion individuelle avant une prise de position sur une question qui se pose au cours d'un débat en plénière, notamment pour redynamiser une plénière longue comme la plénière finale de l'exercice des deux projetés orthogonaux (voir p. 106) ;
- certaines premières utilisations comme les résolutions d'équations du premier degré après l'exercice du deuxième nombre mystère (voir p. 165) ;
- pour permettre aux élèves de tester une idée proposée en plénière ;
- la lecture silencieuse d'une production courte projetée en plénière (même si ce n'est pas indiqué dans les séquences) ;
- un début de recherche quand on sait qu'une plénière de régulation sera vite nécessaire, comme dans l'exercice de détermination des coordonnées de K (voir p. 125) ;
- une question posée au milieu d'une plénière de démonstration (voir p. 42).

Travail individuel dans la plupart des cas, dont les cas particuliers suivants :
- au début d'une série d'exercices techniques de niveau croissant, parce que nous voulons faire le point assez vite sur les premières erreurs et distinguer les élèves qui peuvent s'attaquer aux difficultés suivantes de ceux qui doivent encore s'exercer sur les premières, comme dans les équations avec des écritures fractionnaires ;
- quand nous savons que beaucoup d'élèves pourraient suivre une mauvaise piste sans s'en rendre compte pendant trop longtemps ou une piste que nous ne souhaitons pas qu'ils suivent, et qu'une plénière de régulation sera nécessaire, comme dans l'exercice de la plus petite longueur (p. 238) ;
- pour lire un bilan dactylographié en vérifiant que tout est compris et qu'il n'y a pas d'erreurs (voir p. 42) ;
- quand tous ou presque ont les moyens de s'engager dans la tâche sans aide, même si certains mettront beaucoup de temps comme dans l'exercice du pluviomètre (voir p. 222), le temps laissé aux élèves étant alors assez long : les élèves qui ne démarreront pas seront alors en nombre assez faible pour que nous puissions les accompagner individuellement et de façon différenciée.

Il est souvent difficile de prévoir quel temps donner aux élèves, et on peut être tenté de ne pas le préciser et de voir venir. Nous préférons annoncer un temps approximatif car nous trouvons les élèves plus efficaces avec un cadrage temporel. Ensuite, si nécessaire, nous réajustons en cours de travail le temps donné. Nous l'allongeons quand les élèves sont tous en action et que nous réussissons à gérer l'aide aux tables, quand beaucoup d'élèves le réclament et que leur travail nous semble constructif, ou quand nous avons mal estimé le temps nécessaire. Nous le raccourcissons quand nous avons mal estimé le niveau de difficulté ou quand ils ont terminé majoritairement plus vite que prévu et que les retardataires sont globalement en difficulté lourde.

> Nous évitons d'interrompre le travail individuel trop tôt. Il faut parfois lutter contre la crainte qu'aucun élève ne démarre ou contre la pression d'élèves qui voudraient que vous les aidiez. Le temps paraît parfois long et la montre peut aider à tenir le délai minimum annoncé aux élèves.

Travail en équipes

Les élèves travaillent en mode « avec concertation » (voir p. 15) et doivent élaborer une production collective ou seulement mettre en commun leurs idées. Un travail en équipes est toujours précédé d'un travail individuel en classe ou d'un travail à la maison.

QUELLES TÂCHES PEUT-ON DONNER AUX ÉQUIPES ?

Le travail à faire est clairement défini. La consigne porte aussi sur l'objet de la concertation : se mettre d'accord, trier, chercher les erreurs, seulement mettre en commun… Le support du travail est également précisé. Chacun peut continuer à travailler sur son cahier de recherche, ou bien la production de l'équipe est inscrite sur une seule feuille. Et comme pour un travail individuel, nous donnons pour un travail en équipes un temps approximatif et réajustons si besoin.

Nous pouvons donner une tâche orale :
- échanger sur ce qui a été fait par chacun afin que chacun se prépare à intervenir en plénière pour dire ce qu'il a fait et expliquer ce que les autres ont reproché à sa méthode ;
- se mettre d'accord sur une méthode et éventuellement entraîner un des élèves (par exemple un élève en difficulté) à la présenter en plénière ;
- lister toutes les bonnes méthodes sur un cahier de recherche pour que les élèves soient prêts à les restituer oralement.

Ou une tâche écrite :
- écrire une solution collective en s'appuyant sur les points forts des productions individuelles ;
- choisir une des productions individuelles et l'améliorer collectivement sur la feuille individuelle elle-même ;
- bâtir ensemble une argumentation, la noter sur les cahiers de recherche pour se préparer à l'énoncer et à la défendre en plénière ;
- trouver les erreurs et les corriger collectivement sur chacune des productions individuelles.

QUEL EST NOTRE RÔLE PENDANT UN TRAVAIL EN ÉQUIPES ?

Comme pour les autres dispositifs, notre premier rôle est de garantir le respect des règles du jeu. C'est essentiel en début d'année. C'est pourquoi les premières expériences se font plutôt sur des travaux assez courts et qui ne posent pas de difficultés majeures aux élèves faibles. Petit à petit, les élèves transgressent globalement de moins en moins.
Cependant, il y a toujours quelques situations d'ordre purement relationnel à dénouer ici et là : un élève reste très en retrait dans une équipe, un élève vampirise l'équipe, un élève demande à changer d'équipe. À chaque fois, nous privilégions la négociation et la régulation au changement d'équipe. Nous sommes d'abord dans un rôle de médiation. Trouver une issue pour une situation est rarement immédiat, ce qui nécessite qu'ensuite nous assurions le suivi : nous continuons d'observer particulièrement l'équipe après la régulation et l'accompagnons dans ses progrès en lui proposant de faire le point de temps en temps.

D'autres problèmes sont plus en lien avec le travail proprement dit :
- des pistes de travail sont mises de côté parce que proposées par un élève en difficulté ;
- un débat n'en finit pas parce que les protagonistes ne s'écoutent pas ;
- le travail d'un bon élève est considéré d'emblée comme correct ;
- des erreurs importantes sont laissées de côté alors que toutes doivent être étudiées ;
- le consensus ne s'établit pas malgré des échanges de qualité ;
- un élève rédige pendant que les trois autres regardent.

Nous luttons contre la tentation d'interventions un peu moralisatrices qui provoquent de la résistance du côté des élèves. Pour leur permettre d'avancer, nous intervenons en leur proposant de s'exprimer. En général, nous n'avons pas à prendre position directement. Le fait même de les amener à porter un regard sur le fonctionnement leur permet de trouver des solutions. Il est aussi légitime de faire appel aux règles construites collectivement.

> « Ahmed, peux-tu dire comment vous avez organisé votre travail ? »
> « Dunya, trouves-tu que c'est une bonne organisation ?… Pourquoi ? »
> « Qui a une idée pour améliorer ça ? »
> « Je vous vois discuter de façon très animée depuis tout à l'heure sans pouvoir prendre de décisions, que se passe-t-il ? »
> « Guy, quel est ton point de vue ? »
> « Rémi, peux-tu reformuler à ta façon ce qu'il vient de dire ? »
> « Guy, estimes-tu que Rémi a compris ton point de vue ? »
> « Melyna, peux-tu lui dire pourquoi tu n'es pas d'accord ? »
> « J'ai l'impression que les choses se dénouent pour vous. Pourquoi maintenant et pas tout à l'heure ? »

Il est difficile d'écrire à quatre. L'équipe doit trouver sa propre stratégie pour qu'au bout du compte chacun se sente responsable de l'écrit final et soit capable de le présenter et de le défendre, avec interdiction de perdre son temps. C'est l'objectif annoncé. Néanmoins, il arrive par exemple qu'un élève rédige pendant que les trois

autres regardent; nous leur faisons alors découvrir les faiblesses de leur organisation et travaillons avec eux pour en trouver une meilleure. Parfois aussi, même avec une bonne organisation, certains sont momentanément désœuvrés; nous leur disons alors ce qu'ils peuvent faire d'autre en parallèle.
Notre second rôle important est le même que lors d'un travail individuel: collecter de l'information pour prendre les bonnes décisions. Y a-t-il des équipes à aider? Faut-il organiser une plénière de régulation? Quand commencer la synthèse? Comment prévoyons-nous de la mener? Parfois, les membres d'une équipe n'ont pas démarré ou demandent un renseignement supplémentaire sur l'énoncé. D'abord, nous résistons, en disant éventuellement, pour les rassurer sans intervenir, que nous repasserons dans 2 min. Ils savent qu'on a entendu leur désarroi et souvent cela suffit pour qu'ils démarrent. Nous repassons au bout de quelques minutes et, si besoin est, engageons le dialogue en les questionnant de façon ouverte, d'abord sur leur manière de s'organiser pour utiliser les productions individuelles, ensuite en demandant à l'un d'exposer ce qu'il a fait, à un autre de dire ce qu'il en pense, puis à un troisième s'il est d'accord, etc. En d'autres termes, nous animons le débat pendant 1 ou 2 min avant de nous éloigner à nouveau. Dans tous les cas, nous essayons d'observer d'abord assez longuement un groupe avant d'intervenir pour éviter les remarques déconnectées de leur problématique du moment. Nous essayons de rester sur des questions ouvertes qui invitent les élèves à s'exprimer sur ce qu'ils ont produit. S'il y a beaucoup d'équipes en difficulté et que nous ne savons plus où donner de la tête, nous faisons une plénière de régulation pour mutualiser les pistes, fournir une aide ou, en dernier lieu, réduire la tâche.

Quand interrompre un travail en équipes pour passer à la synthèse? C'est rarement le bon moment pour tous et il faut accepter les compromis. Ce compromis est souvent difficile à trouver. Des deuils douloureux en perspective…

QUAND COMMENCER À RÉDIGER? ET QUI RÉDIGE?

Les élèves ont souvent tendance à s'engager trop vite dans l'élaboration du compte rendu collectif écrit du travail, avant que tous soient au clair et d'accord sur le fond de ce qui va être écrit. Quand nous pensons que c'est le cas dans une équipe, nous intervenons: « Vous êtes en train de rédiger, c'est que vous êtes tous bien au clair sur ce qui va être écrit. Coraline, peux-tu dire ce que vous avez trouvé? », « Euh… », « Pensez-vous respecter les règles d'une concertation? Arrêtez votre rédaction et prenez le temps de vraiment vous mettre d'accord. Tout à l'heure, c'est peut-être Coraline qui devra dire à la classe ce que vous avez trouvé. » Parfois, avant de donner une feuille à l'équipe pour écrire sa production commune, nous demandons à un élève bien choisi (faible ou timide) de nous expliquer ce que l'équipe va écrire. S'il ne le sait pas, nous indiquons que nous ne donnerons la feuille à l'équipe que quand il sera capable de le faire.
La question du choix du rédacteur se pose aussi. Certaines équipes ont des organisations qui conviennent. Par exemple, les élèves rédigent chacun leur tour, d'un travail à l'autre. Ou encore, à partir d'un brouillon collectif obtenu en améliorant ce qu'un des élèves a écrit sur son cahier de recherche, l'un fait une proposition orale qui est améliorée collectivement puis notée par le rédacteur du moment, et tous sont impliqués.
Quand la rédaction est longue, il est souvent utile de proposer un petit travail technique en parallèle pour ceux qui ne rédigent pas. Il faut faire très attention que l'équipe se reconstitue bien autour de la production collective avant la plénière, en prévoyant un temps suffisant de relecture par exemple.

COMMENT GÉRER LES DIFFÉRENCES DE RYTHMES D'UNE ÉQUIPE À L'AUTRE?

Quand une équipe est particulièrement en retard, nous pouvons, selon les cas:
- lui permettre d'envoyer un émissaire glaner quelques pistes dans une autre équipe que nous choisissons;
- demander à une ou deux équipes que nous choisissons de lui adresser des aides sur un petit morceau de papier, l'aider à clarifier le débat ou lui proposer des pistes;
- lui éviter de perdre du temps en efforts inutiles de mise en forme (certaines équipes soignent exagérément la présentation et s'y engluent);
- réduire la tâche en acceptant que l'équipe ne rédige qu'une partie de l'exercice.

Quand au contraire une équipe a fini en avance sur les autres, nous lui proposons une tâche supplémentaire, en lien ou non avec le travail en cours. Et si plusieurs équipes sont en avance, nous pouvons aussi leur faire échanger leurs productions. Elles doivent alors critiquer les textes et adresser un commentaire écrit aux auteurs qui vont ainsi améliorer leur premier jet.

QUAND INTERCALONS-NOUS UN TRAVAIL INDIVIDUEL AU MILIEU D'UN TRAVAIL EN ÉQUIPES?

Quand la classe semble un peu s'enliser dans un travail en équipes, nous pouvons demander aux équipes de fonctionner pendant 5 min en travail individuel afin que chacun puisse se recentrer, prendre du recul, et que l'ensemble retrouve un peu de sérénité. Nous faisons aussi cette proposition de temps en temps à une ou plusieurs équipes qui dysfonctionnent ponctuellement en concertation, pendant que les autres poursuivent la concertation. Par exemple, les débats sont devenus houleux, le ton commence à monter, nous intervenons: « Bon, revenez chacun sur votre cahier de recherche et prenez 5 minutes pour réfléchir individuellement à ce que vous pensez de la proposition d'Amine. »

Travail personnel avec entraide

Un travail personnel avec entraide consiste en une production individuelle en mode « avec entraide » (voir p. 15). Ce dispositif est particulièrement adapté pour les entraînements techniques de prise en main un peu longs comme les exercices sur les équations de droite (voir p. 146): il permet alors de différencier le travail puisque les élèves les plus rapides pourront aller plus loin dans l'entraînement (on peut prévoir de graduer les difficultés). Nous l'utilisons aussi parfois pour l'écriture de la rédaction individuelle d'un exercice qui a été résolu collectivement.

À chaque fois, nous précisons aux élèves quelle utilisation ils vont faire du dispositif. Par exemple: « Vous allez vous entraîner individuellement sur les équations de droite. Voici une série d'exercices. Chacun va travailler à son rythme. Quand vous êtes en trop grande difficulté, vous pouvez demander de l'aide à vos camarades. Quand vous voulez vous assurer que tout va bien, vous pouvez comparer vos résultats intermédiaires avec ceux d'un camarade. » On peut ajouter: « Quand tous les membres de l'équipe auront fait les trois premiers exercices, vous vous mettrez d'accord sur les bonnes réponses, vous expliquerez les erreurs et chacun corrigera son travail. » Autre exemple: « Vous allez rédiger une solution individuellement. Si vous avez des difficultés, vous pouvez demander de l'aide. Si vous le souhaitez, vous pouvez faire relire de petits passages par les membres de votre équipe. »

Nous veillons au bon fonctionnement de l'entraide. Des élèves peuvent être tentés d'y recourir trop vite. D'autres qui galopent devant n'ont parfois pas envie d'aider un camarade; en échange de leurs efforts dans ce sens, nous leur proposons parfois de se lever pour aller échanger avec un élève rapide d'une autre équipe. Parfois même, nous constituons momentanément de nouvelles équipes plus homogènes. Nous veillons aussi à ce que le travail avec entraide ne se transforme pas en travail en équipes.

Plénière de régulation

Nous appelons « plénière de régulation » toute plénière qui a lieu en cours de recherche. Nous la différencions de la plénière de synthèse qui a lieu en fin de travail, quand la tâche proposée est accomplie, même s'il s'agit d'une sous-tâche dans un parcours long. La plénière de régulation peut avoir été prévue dès la préparation de la séquence parce que l'expérience nous dit qu'elle sera nécessaire, ou bien être improvisée en fonction de ce que nous observons:

- quand beaucoup d'élèves ont du mal à démarrer, pour mutualiser les difficultés et les premières pistes, préciser la consigne, faire reformuler l'énoncé, commencer au tableau un brouillon collectif, ou encore donner une aide magistrale;
- quand beaucoup de pistes sont explorées par les élèves ou les équipes et que nous souhaitons recentrer la recherche: cela permet de faire énoncer et critiquer les pistes avant de relancer;
- quand une erreur est commise par beaucoup d'élèves en cours de recherche et qu'elle fait obstacle dans la construction du nouveau savoir: cela permet de la travailler collectivement, comme dans l'exercice des retards (voir p. 64);
- quand plusieurs méthodes sont possibles, comme dans l'exercice du jardin potager (voir p. 233): cela permet de présenter différentes pistes, et à certains élèves de changer leur choix initial, à d'autres d'enrichir leur démarche et aux plus en difficulté d'avoir de nouvelles idées à explorer;
- quand la non-maîtrise d'un savoir ancien fait obstacle et que nous avions choisi d'attendre que les élèves en aient besoin pour le réactiver plutôt que d'anticiper dans une préparation: c'est le cas dans l'exercice de la fin du monde (suite) pour la définition de l'image d'un nombre (voir p. 215).

> Attention de ne pas multiplier ces interruptions. Cela risquerait de couper les élèves dans leur élan ou leur laisserait penser que s'ils n'y arrivent pas, vous allez intervenir jusqu'à faire le travail pour eux.

Il n'est pas toujours aisé de décider de l'opportunité de ces interruptions, ni du meilleur moment pour les effectuer. Toutefois, nous faisons très attention de ne pas anticiper sur les erreurs. Par exemple, nous nous interdisons d'intervenir sous prétexte que les trois élèves les plus rapides se trompent, nous attendons que les autres fassent leur proposition personnelle. Nous ne mutualisons pas non plus les pistes avant que chacun ait eu le temps de s'emparer du problème et de proposer une première piste.

En début d'année, ces interruptions nécessitent d'être imposées avec fermeté pour nous permettre d'obtenir très vite l'attention de tous. Certains élèves qui sont bien avancés dans leurs investigations sont frustrés. D'autres pensent que nous allons « corriger ». Les choses s'améliorent quand nous expliquons aux élèves ce qui va se passer. Par exemple : « Non, nous n'allons pas faire la synthèse maintenant ! Trop sont en difficulté, je voudrais leur dire ce que d'autres ont fait pour commencer, ainsi ils pourront essayer : Anne a fait un schéma comme celui de mardi, Paul a fait des essais avec plein de nombres… Ils n'ont pas encore trouvé mais il se passe des choses pour eux. » Ou bien « Personne ne semble se préoccuper de l'angle droit qui est donné, je vous engage à ne pas l'oublier dans vos recherches… et quand un triangle est rectangle, on peut faire appel à d'autres théorèmes que celui de Pythagore, je vous engage à chercher lesquels. » Notre intervention est souvent magistrale, ce qui nous permet d'avoir le contrôle sur les aides fournies. Donner la parole à des élèves plus avancés risque de tuer le problème pour les autres. C'est cependant parfois possible quand le travail est peu avancé (reformulation d'énoncé, par exemple) ou quand nous sommes sûrs qu'ils n'iront pas trop loin dans les pistes qu'ils vont proposer.

ALTERNATIVE À LA PLÉNIÈRE DE RÉGULATION

Nous interrompons parfois un travail individuel pour demander à certaines équipes d'organiser un travail en concertation très ponctuel. Par exemple, quand les élèves sont en cours de travail individuel, nous pouvons demander un travail en concertation de 5 min pour critiquer les productions individuelles intermédiaires. Ensuite, les élèves poursuivront un travail individuel où chacun devra améliorer sa première production et aboutir à une réalisation finale.
C'est une interruption moins radicale que la plénière de régulation qui présente l'avantage de pouvoir se faire dans une ou deux équipes seulement, ou pas au même moment pour toutes les équipes. Nous sommes alors très vigilants quant au niveau sonore des échanges puisque d'autres élèves poursuivent individuellement leur travail. Par exemple, nous allons le proposer à une équipe de quatre élèves dont trois sont en difficulté sur la tâche pour que le quatrième fournisse une aide ponctuelle. On peut aussi le faire quand un ou deux membres d'une équipe avancent trop longtemps dans une direction vouée à l'échec.

Plénière de démonstration

Nous utilisons surtout ce dispositif pour des démonstrations inscrites dans le programme. La démonstration dure au plus 10 min. En nous voulant rassurants, nous disons : « Nous allons effectuer une démonstration. Il est tout à fait possible, voire normal, que vous ne compreniez pas tout. Ce n'est pas grave. Si vous pensez choisir la spécialité mathématiques l'an prochain, faites un effort particulier. Je vous donnerai le bilan photocopié : ne prenez pas de note, essayez juste de comprendre. »
La démonstration est faite de manière assez magistrale mais nous rendons les élèves autant actifs que possible dans le temps imparti. Pour cela, nous posons des petites questions relativement fermées, en travail individuel très bref, notées « Question » dans les séquences.
La démonstration est écrite petit à petit au tableau. Quand elle est finie, nous en distribuons un résumé polycopié à coller à la fin du cahier de résumés.

Bilan à l'aide d'un document dactylographié

Le programme de 2de est trop volumineux pour que nous puissions, comme en collège, faire la plupart des bilans des exercices à l'aide de photocopies de productions d'élèves ou en faisant recopier un texte écrit au tableau. Nous devons en passer par des bilans dactylographiés. Nous prenons grand soin dans l'élaboration de ces bilans de rester au plus près de ce qui s'est passé en classe. Le bilan distribué, les élèves le lisent individuellement avec comme consigne de chercher à tout comprendre et de recenser ce qui n'est pas clair pour eux afin de demander des explications. Ensuite, si des points importants n'ont pas été l'objet de questions, nous interrogeons la classe sur ces points. Parfois, nous glissons une ou deux erreurs dans le bilan et demandons aux élèves de les trouver, ou nous nous étonnons rétroactivement qu'ils ne les aient pas trouvées alors qu'ils prétendent l'avoir lu attentivement (la fois suivante, ils liront en cherchant les erreurs !). Il nous arrive également de demander aux élèves d'écrire un bilan à la maison sur le cahier de recherche avant de distribuer le bilan dactylographié lors de la séance suivante, ce qui facilite la lecture de ce dernier. La consigne de lecture peut alors être : « Qu'aviez-vous oublié dans votre bilan ? »

Travail supplémentaire pour les rapides

Lors d'un exercice difficile ou un peu long, il arrive que certains terminent avant que les plus lents n'aient encore posé les premières pierres. Nous essayons autant que possible de respecter le rythme des plus lents, surtout dans certains moments fondamentaux de l'apprentissage, comme la découverte personnelle des exercices ou les essais-erreurs nécessaires à l'exploitation des pistes données en plénière ou pendant une concertation. Les plus rapides pourraient alors facilement se trouver désœuvrés, c'est pourquoi nous essayons d'anticiper les moments où les rythmes risquent d'être très différents pour leur prévoir du travail supplémentaire. Si le travail supplémentaire est donné pendant un travail individuel,

chacun travaille de son côté. S'il est donné pendant un travail personnel avec entraide, nous rappelons si nécessaire à l'élève rapide qu'il doit mener ce travail tout en jouant son rôle de personne-ressource dans l'équipe.
Il ne s'agit pas de les occuper mais de leur permettre d'avancer à leur rythme et à leur niveau. Nous pensons qu'il est important de permettre à ces élèves de se confronter régulièrement à des difficultés de leur niveau pour qu'ils apprennent, eux aussi, à chercher un peu longuement, à se tromper et surtout à gérer le fait de ne pas trouver tout de suite (comme ils en ont souvent l'habitude). Nous leur proposons, selon les opportunités, d'aller plus loin que les autres dans l'exercice comme par exemple dans l'exercice de l'ordonnée inconnue (voir p. 141), de faire un autre exercice sur le thème du jour comme dans l'exercice des dés tétraédriques de Sicherman (voir p. 94), un exercice inspiré des rubriques « approfondissement possible » du programme ou un exercice tiré de notre réserve personnelle – disponible en ligne. Nous privilégions des exercices créatifs, qui peuvent donner lieu ensuite à un retour rapide en plénière. Quand il s'agit d'un autre exercice, son énoncé est écrit sur une feuille A5 (voir en ligne les exercices supplémentaires pour les élèves rapides). À la fin de la séance, l'élève nous rend la feuille avec les résultats de ses recherches. Il n'a en général pas à rédiger l'exercice mais son travail doit être lisible. Nous accompagnons l'élève au mieux soit en lui fournissant des aides, soit en l'associant ponctuellement à d'autres élèves qui travaillent sur le même exercice. Dans ce dernier cas, ils peuvent rendre une seule feuille en fin de séance. Une fois la feuille récupérée, nous l'annotons. Si l'élève n'a pas trouvé et que nous estimons qu'il est intéressant de poursuivre le travail sans que cela soit rébarbatif, nous écrivons un indice sur la feuille, et l'élève reprendra ce travail en classe, s'il en a l'occasion.
Pour autant, la cohésion du groupe-classe, indispensable aux apprentissages dans notre pratique, ne doit pas en souffrir. Les élèves rapides doivent prendre part à toutes les plénières. Ils doivent aussi travailler de la façon la plus autonome possible pour que nous restions disponibles pour les autres. Le protocole ne s'installe que progressivement, et il est souhaitable de l'expliquer à tous les élèves pour qu'il ne soit pas ressenti comme porteur de ségrégation mais plutôt comme un moyen de permettre à chacun de travailler à son rythme.

Travail en salle informatique

Ce que nous décrivons dans cette section et dans les séquences du livre a été expérimenté lors de séances en salle informatique en demi-classe. Pour autant, il n'était pas toujours facile d'organiser de telles séances et elles étaient assez rares (seulement 4 ou 5 par an pour chaque élève, sur Python essentiellement). Pour que les élèves bénéficient au mieux de ces séances, le collage de documents dans les cahiers et les bilans des exercices donnés pendant ces séances sont faits dans la mesure du possible en classe entière, en salle ordinaire.

EN DÉBUT DE SÉANCE

Quand la séance en salle informatique constitue le début d'un travail qui se poursuivra en salle ordinaire lors des séances suivantes, nous en informons les élèves et leur expliquons rapidement les enjeux de ce travail introductif sur ordinateur.
L'entraide est autorisée suivant certaines modalités. Nous disons : « En cas de difficulté, vous pouvez demander de l'aide à votre voisin mais ne regardez pas son écran car cela n'est pas propice aux apprentissages. Ne restez pas bloqués trop longtemps, demandez de l'aide si vous n'avancez pas pendant quelques minutes. Si à l'inverse vous aidez un camarade, vous pouvez regarder son écran mais ne touchez ni son clavier ni sa souris : la meilleure façon qu'il apprenne à se servir d'un ordinateur est qu'il fasse le travail lui-même ! »
En général, nous projetons un document avec des consignes telles que les documents à avoir sous les yeux ou des aides techniques sur les manipulations à effectuer pour commencer le travail (des exemples se trouvent dans les ressources des séquences AP1 et AP2 en ligne). Parfois, ce document reste projeté pendant toute la séance. Pour lancer le travail, nous demandons aux élèves de le lire et de nous faire part de leurs questions.

PENDANT LA SÉANCE

Si besoin et sans stopper les élèves dans leur travail, nous demandons parfois à voix haute, à la cantonade : « Qui n'a pas fini telle question ? » S'il n'y a pas trop d'élèves dans ce cas, nous les aidons individuellement. Sinon, nous en faisons aider certains par d'autres élèves ou organisons une régulation en autorisant ceux qui ont fini la question à poursuivre.
Nous veillons à ne pas courir d'un élève à l'autre ! À chaud, nous organisons une régulation pour tous les élèves ou seulement une partie d'entre eux. Si nous en sommes arrivés là, c'est probablement que la séance était mal préparée. Alors, après la séance, nous prévoyons des ajustements pour l'année suivante – ou le groupe suivant – avant de l'oublier.
Quand nous faisons une plénière de régulation, nous demandons à tous les élèves de se tourner vers nous ou vers le tableau, et de ne plus regarder leur écran (si c'est possible, nous figeons les écrans des élèves depuis l'ordinateur du professeur).
Nous prenons le moins possible le clavier et la souris des élèves, nous préférons expliquer aux élèves comment faire, même si c'est parfois beaucoup plus long. Pour éviter les tentations, nous mettons parfois les mains dans les poches !

EN FIN DE SÉANCE

En général, nous récupérons sur clé USB ou via l'ENT quelques productions d'élèves en vue du bilan en salle ordinaire qui suivra. Parfois, quelques minutes avant la fin de séance, nous donnons comme consigne aux élèves d'imprimer les travaux réalisés en les faisant précéder de leur prénom. Si besoin, nous montrons au vidéoprojecteur comment accéder à l'imprimante de la salle. Les travaux imprimés sont ensuite collés dans le cahier de bord.

Travail à la maison

Il nous paraît dommageable pour l'apprentissage de réduire le travail à la maison au prétexte que beaucoup d'élèves ne le font pas, le bâclent, copient les uns sur les autres ou le font faire par leurs parents. Par notre façon de le présenter, nous essayons de faire évoluer l'image du travail à la maison dans l'esprit des élèves.

COMMENT LE PRÉSENTONS-NOUS AUX ÉLÈVES ?

Nous essayons de donner du sens au travail à la maison en expliquant à l'élève à quoi il peut lui servir et en le responsabilisant. Par exemple : « Je propose à ceux qui n'ont pas bien réussi ce travail technique aujourd'hui de s'entraîner un peu à la maison sur une nouvelle série d'exercices. Aurez-vous le temps de faire ce travail pour mercredi ou préférez-vous pour jeudi ? Ceux qui le souhaitent peuvent me rendre le travail sur feuille pour que je le corrige. » Ou bien, une semaine avant l'évaluation prévue le jour J : « Je vous donne une série d'exercices pour J −4 afin que vous puissiez mieux préparer l'évaluation. Choisissez de faire ceux qui correspondent à vos difficultés et préparez des questions à me poser à J – 4. » Ou enfin : « Ce devoir à la maison comprend deux exercices de niveau 1 et deux exercices de niveau 2. Vous devez en faire au moins deux, au choix. Ceux qui ont envie d'en faire plus que deux le peuvent, cela les fera certainement progresser. » Introduire une part de choix dans le délai ou le nombre d'exercices à faire met l'élève dans de meilleures dispositions.
Plutôt que d'essayer de repérer les élèves qui ont recopié sur les autres, nous insistons sur les réussites : « Tu t'es bien entraînée à la maison et tu as eu une bonne note à l'évaluation, bravo ! » ou : « On voit que tu l'as fait tout seul, tu vas progresser. » Cette remarque positive sera entendue aussi par l'élève d'à côté qui avait recopié, et sera peut-être plus efficace qu'une remarque négative envers lui. Quoi qu'il en soit, nous contrôlons toujours que le travail à la maison est fait. En début d'année, c'est chronophage mais indispensable pour montrer aux élèves notre vigilance. Ensuite, c'est plus rapide car nous savons quels élèves sont à surveiller de plus près, ce qui permet de contrôler plus rapidement les autres.
Nous n'interdisons pas aux élèves de faire leurs devoirs à plusieurs ou avec leurs parents. Nous ne pouvons pas contrôler un tel interdit, c'est le droit le plus strict des parents de travailler avec leur enfant, et nous ne pouvons pas prôner le travail en équipes en classe et le bannir à la maison. Parfois néanmoins, quand nous pensons que c'est indispensable, nous disons : « Je vous engage à essayer de faire ce travail tout seul à la maison, sans aucune aide. Ce n'est pas grave de ne pas réussir. Faites un brouillon et préparez des questions… mais surtout, tout seul cette fois, je compte sur vous. »
Les élèves apprennent à chercher en classe mais ont parfois du mal à transférer à la maison les méthodes acquises. C'est pourquoi nous leur donnons parfois des conseils de travail : « Faites l'exercice 1 pour mardi sur votre cahier de recherche. Si vous ne trouvez pas de solution, gardez bien la trace de votre recherche, de ce que vous avez essayé de faire, des questions que vous vous êtes posées. Vous pourrez dire tout cela en classe mardi. Je ne veux alors pas entendre "Je n'ai rien fait parce que je n'ai pas su", mais plutôt "J'ai essayé ceci ou je ne comprends pas cela." » Bien sûr, nous ne serons crédibles que si nous travaillons effectivement ensuite sur ces pistes non abouties et ces questions personnelles.

QUE DONNONS-NOUS À FAIRE À LA MAISON ?

Nous évitons de faire en classe ce qui peut être abordé à la maison sans aide extérieure par la grande majorité. En voici une liste non exhaustive :

- exercice de prise en main abordable, par exemple l'exercice du baccalauréat (voir p. 57) ; entraînement technique, par exemple les séries d'exercices en allers-retours des séquences CL1, CL2 et CL3 (voir plus bas) ;
- petit problème, par exemple l'exercice des deux carrés (voir p. 177) ;
- exercice préparatoire à un travail qui se fera en classe, par exemple l'exercice de la cible (voir p. 135) qui prépare la découverte de la notion de coefficient directeur ;
- travail de recherche (avec par exemple le protocole « Travail redonné en cas de problème » décrit plus bas) ;
- rédaction d'un travail accompli en classe, par exemple la question 3. de l'exercice du quadrilatère abstrait (voir p. 110) ;
- travail nécessitant l'utilisation d'un ordinateur : série du Club des expressions, programme Python à écrire ou à tester, travail sur un fichier de tableur, par exemple l'exercice des antécédents de 100 (suite) (voir p. 179) ;
- devoir à la maison.

Devoir à la maison. Quand ce dispositif est indiqué dans une séquence, nous procédons ainsi : le travail est donné pour J + 7 ; nous aidons les élèves en choisissant une des deux options décrites dans la section suivante ; nous corrigeons (en général) les copies mais ne les notons pas ; nous organisons (en général) une plénière de synthèse où des extraits de copies sont projetés et discutés ; via l'ENT, nous faisons parvenir aux élèves un document avec des solutions possibles du devoir ; nous rendons les copies aux élèves.

> Nous évitons de donner à faire à la maison des exercices qui nécessitent une aide extérieure, afin de ne pas creuser les écarts. Ceux qui ne peuvent pas en bénéficier seront désavantagés et risquent de se décourager. De plus, l'exploitation du travail en classe sera difficile.

COMMENT LES ÉLÈVES SONT-ILS AIDÉS DANS LEUR TRAVAIL À LA MAISON ?

Nous faisons le pari que les élèves qui bâclent le travail sont plus découragés que fainéants. Les élèves sont aidés dans leur travail à la maison, ce qui les encourage. Voici quatre exemples.

Concertation en équipes. L'exploitation en plénière du travail à la maison est presque toujours précédée d'un temps de concertation en équipes. Les échanges permettent aux élèves de se remémorer ce qu'ils ont fait et de commencer à questionner en toute sécurité la validité de leur travail et de celui des autres. Cela les aide à préparer des interventions ultérieures en plénière, et réduit les écarts entre les élèves en difficulté et les autres.

Série d'exercices avec allers-retours. Les élèves vont s'entraîner un peu longuement sur une liste d'exercices (voir par exemple les entraînements de calcul littéral). Tous commencent par une même tâche, par exemple six petits exercices. Nous relevons, annotons et adaptons la suite en fonction des difficultés rencontrées par chacun. Un élève qui a tout réussi a six nouveaux exercices à faire, un autre qui en a réussi correctement quatre doit en faire quatre nouveaux et reprendre les deux exercices que nous n'avons pas validés en s'aidant cette fois-ci des indices que nous avons notés. Un autre peut aussi avoir tout à reprendre sans aborder la suite. Nous pouvons poursuivre ainsi sur deux semaines, par exemple. Chacun peut ainsi travailler à sa mesure. Lorsque nous rendons les copies pour la dernière fois, nous envoyons les solutions via l'ENT.

Travail redonné en cas de problème. Au moment d'exploiter un travail à la maison, nous constatons qu'il a posé des problèmes à beaucoup d'élèves (voir par exemple l'exercice de la fin du monde p. 214). Nous renonçons donc à la plénière de synthèse pour une plénière de régulation où difficultés et pistes sont mutualisées, et ceux qui n'ont pas réussi refont le travail à la maison pour la séance suivante. Ce dispositif permet d'accompagner les élèves en difficulté et de différencier le travail en permettant aux uns d'être beaucoup aidés et aux autres d'aboutir seuls. Ceux qui ont réussi à faire l'exercice la première fois sont valorisés puisqu'ils proposent les pistes. Il permet également de ne pas renoncer aux travaux de recherche à la maison et d'obtenir, pour beaucoup d'élèves, des productions correctes, ce qui rend possible l'exploitation des erreurs qui persistent. Enfin, grâce à ce dispositif, les élèves apprennent à travailler à une tâche ardue sur plusieurs jours.

Devoir à la maison avec aides intermédiaires. Le travail est à faire pour J + 7. Nous avons alors deux options.

- **Première option** : annoncer que nous répondrons à toutes les questions, soit au lycée entre deux cours, soit via l'ENT. Entre J + 1 et J + 5, nous informons la classe que certains élèves ont posé des questions, que nous y avons répondu, et que ces élèves sont en train de progresser.
- **Deuxième option** : annoncer par exemple que le travail doit être commencé à la maison pour J + 2 en indiquant d'emblée qu'il sera possible de poser des questions à ce moment-là (voir par exemple l'exercice de la population française p. 72). On permet ainsi à ceux qui le peuvent de démarrer vraiment seuls, voire d'aboutir. À J + 2, en plénière, des élèves disent leurs difficultés et des aides sont proposées par les autres ou par nous. Pour J + 3, un nouvel essai est fait à la maison. À J + 3, lors d'une nouvelle plénière, les difficultés et les pistes sont à nouveau mutualisées. Tous rendent le travail à J + 7.

CHAPITRE 8

Plénière de synthèse

Pendant que les élèves produisaient leurs réponses (voir p. 37 et 39), nous avons commencé à préparer mentalement le déroulement de la plénière de synthèse ainsi que la manière de le mettre en place. Parfois cette plénière est différée au cours suivant, auquel cas nous avons pu la préparer calmement à la maison. Commence alors le plus difficile pour nous : réussir à faire émerger en douceur le nouveau savoir ou la solution à partir des productions, rendre tous les élèves actifs, maintenir un bon rythme, se contenter du rôle d'animateur.

> Renoncer au plaisir narcissique de déverser un savoir prêt à l'emploi devant un auditoire captif, parler plutôt que discourir, solliciter la parole de l'élève plutôt qu'expliquer, perdre l'illusion qu'il suffit de bien expliquer ou de bien montrer pour être compris : c'est une rupture radicale avec l'image qu'on se fait classiquement de l'acte d'enseigner.

Rupture nécessaire avec l'idée de correction

Un petit dialogue un soir entre une mère et son fils.

> *La mère* : « Qu'as-tu fait aujourd'hui en maths ? »
> *Julien* : « Rien. »
> *La mère* (surprise) : « Comment ça, rien ? »
> *Julien* : « On a corrigé et j'avais tout bon. »

Comme Julien, un élève qui a terminé un travail pense que le professeur va organiser un temps de correction, c'est-à-dire un temps où il s'agira seulement de remplacer sur les cahiers ce qui est faux par quelque chose de juste. Le mot « correction » provoque souvent chez les élèves des attitudes impropres à l'apprentissage : s'il s'agit de « corriger les erreurs », il suffit d'attendre que le professeur ou un autre élève donne la bonne réponse et de la recopier. Ces temps ont disparu de notre pratique et nous n'employons plus le mot « correction » pour le signifier aux élèves, afin d'éviter les attitudes négatives qu'il induit. Nous disons, par exemple : « Étudions ensemble ce que vous avez fait. », ou « Comparons les méthodes que vous avez employées. », ou « Il y a plusieurs réponses dans la classe, essayons de trouver laquelle ou lesquelles répondent bien au problème posé. », etc. Quand un savoir doit émerger après un exercice, nous l'annonçons : « On ne va pas se contenter de faire le bilan, en étudiant ce que vous avez fait, on va découvrir quelque chose de nouveau. Soyez particulièrement attentifs. »
Ce temps d'exploitation des productions, qui clôt un travail, engage tous les élèves dans une véritable activité mathématique : examiner son travail et celui des autres avec un regard critique, découvrir d'autres méthodes, communiquer ce qu'on a fait… L'activité de chacun doit être tout aussi intense que pendant la phase de production.
Un effort peut être nécessaire pour faire disparaître le mot « correction » de son vocabulaire. Il est plus aisé d'apprendre à parler des erreurs avec une bienveillance particulière, même si ne jamais déraper, les mauvais jours, demande une grande concentration et beaucoup de rigueur : la confiance des élèves est à ce prix.

Étapes d'une plénière de synthèse

Une plénière de synthèse se différencie de ce que Julien appelle « correction » par la richesse de ses objectifs. Elle se déroule en trois étapes qui correspondent à des objectifs d'apprentissage différents. Pour que l'élève trouve du sens aux différents moments, nous l'aidons à identifier ces étapes en les annonçant et, en début d'année surtout, explicitons ce qui s'y joue.

DÉBAT AUTOUR DES PRODUCTIONS ET ÉLABORATION COLLECTIVE D'UNE OU DE PLUSIEURS SOLUTIONS

Nous choisissons d'abord la façon de mettre en commun les productions pour élaborer un écrit autour duquel le débat va s'organiser. Va-t-on simplement demander aux élèves de s'exprimer à partir de leur cahier de recherche et prendre des notes au tableau ? projeter l'ensemble des productions collectives ? fabriquer un document de travail à partir d'extraits choisis ?
Les productions présentées deviennent des objets d'étude pour la classe. Elles ne sont pas anonymisées car il peut être intéressant de donner la parole aux auteurs. L'organisation des plénières met les auteurs à l'abri des moqueries. Les élèves en difficulté sont protégés.
Au début du débat, l'écrit est donc inscrit ou projeté au tableau. Les élèves le lisent avec une tâche précise à accomplir : trouver les erreurs, comparer les méthodes, etc.

Puis nous distribuons la parole sans prendre position : cela aurait tendance à tuer le débat car il faut beaucoup d'aplomb à un élève pour contredire le professeur. Chacun peut alors donner ses idées, dire s'il est d'accord ou non, argumenter pour convaincre. Pour jouer notre rôle d'animateur, nous adoptons un ton neutre et occupons souvent une position un peu excentrée dans la classe.

> Apprendre à se mettre en retrait par rapport à la classe, à en dire le minimum, à peser chaque mot n'est pas toujours facile. Angoisse du vide ? habitudes à changer ? peur de perdre du temps ? Pourtant, plus on se tait, plus les élèves parlent…

Au cours de cette phase, chacun progresse dans ses apprentissages de façon différenciée. L'un va comprendre pourquoi ce qu'il a fait ne convient pas, un autre va découvrir une façon de faire plus rapide, un troisième comprendra mieux ce qu'il a fait en équipe parce qu'il l'a exprimé devant toute la classe, un dernier va apprendre à mieux exprimer sa pensée.
Les échanges en plénière vont permettre l'élaboration progressive puis la validation par tous d'une ou plusieurs solutions. À la fin du débat, nous proposons à certains élèves de reformuler ce qu'ils ont compris.

IDENTIFICATION DES ENSEIGNEMENTS À TIRER DE L'EXERCICE

Chaque problème résolu est une expérience dont les élèves peuvent tirer des enseignements, si nous les y aidons. Quand il s'agit d'un travail pour conjecturer ou démontrer un théorème, par exemple, les élèves comprennent facilement que son énoncé doit être retenu pour l'avenir. D'autres fois, c'est un peu moins évident pour eux ; voilà à quoi cela peut ressembler avec l'analyse de l'erreur de d'Alembert (voir p. 92).

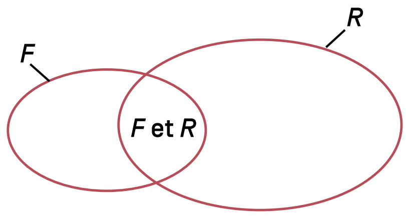
> *Le prof* : « Revenons un peu sur ce qui s'est passé aujourd'hui : pourquoi la plupart d'entre vous étaient-ils d'accord avec d'Alembert ? »
> *Un élève* : « Parce qu'on a dit que les issues étaient équiprobables. »
> *Le prof* : « Que peut-on se dire pour l'avenir ? »
> *Un élève* : « Que les issues ne sont pas toujours équiprobables. »
> *Le prof* : « Mais les issues, c'est à vous de les choisir ! »
> *Un autre élève* : « Oui mais il faut qu'on choisisse des issues équiprobables, sinon on peut se tromper… »

Cette seconde étape de la plénière est courte mais décisive quant à la construction du sens de l'activité mathématique. Elle met l'ensemble du travail en perspective pour dégager un savoir, un savoir-faire, une technique, quelque chose qu'on a appris en faisant l'exercice. Pour être retenus et avoir de l'avenir, ces enseignements doivent être séparés de la solution de l'exercice. Nous agissons pour en détacher les élèves : « À partir de maintenant, vous saurez donc que… » ou : « Vous savez maintenant que cette propriété peut vous permettre de… » Nous avons quitté notre rôle d'animateur pour reprendre la casquette de garant du savoir : c'est, en partie, en identifiant ces deux rôles que l'élève va faire la différence entre la solution collective de l'exercice et le savoir ou savoir-faire à retenir.

ÉLABORATION DES TRACES SUR LE CAHIER DE BORD

Une fois le débat clos et le savoir ou savoir-faire à retenir identifié et mis oralement en forme, nous passons au bilan sur le cahier de bord. Ce bilan peut très bien être fait le lendemain (attendre trois jours serait trop tard). L'effort de reconstruction que les élèves ont alors à opérer, à petite distance du débat, est souvent très productif pour les apprentissages.
Ce bilan est constitué d'une ou deux parties : une ou deux solutions de l'exercice, puis éventuellement ce qu'il faudra en retenir.

Par exemple, pour l'exercice du contrôle antidopage (voir p. 100), le tableau est rempli avec les calculs puis les enseignements à en tirer sont recopiés et encadrés (voir encadré ci-dessous).



Attention, $P(F \text{ ou } R) \neq 50\% + 10\%$ car dans les 10 % du reste du monde, il y a 5 % de femmes.
On a : $P(F \text{ ou } R) = 50\% + (10\% - 5\%)$
$= P(F) + \big(P(R) - P(F \text{ et } R)\big)$

On ne retient pas encore une propriété mais un exemple générique, premier pas vers la propriété générale.
Ce qui figure sur le cahier peut être élaboré de plusieurs façons :
- nous l'écrivons au tableau en prenant soin d'être vraiment très proches de ce que les élèves ont construit, puis ces derniers recopient ;
- pendant la reformulation en fin de plénière, nous avons écrit le bilan sous la dictée de quelques élèves, d'autres proposant des ajustements, puis ils recopient ;
- à la fin de la plénière, nous avons choisi une production de qualité moyenne, puis, avec les élèves, l'avons annotée en raturant ce qui était faux et en la complétant

pour obtenir un travail satisfaisant. Lors de la séance suivante, nous en distribuons une copie à coller; elle rappellera sous une forme vivante les améliorations collectives;
– nous distribuons un bilan dactylographié proche de ce qui s'est dit en plénière (voir p. 42). Ce document peut être fabriqué à l'avance si nous pouvons anticiper la manière dont la plénière va se dérouler, ce qui est le cas pour l'exercice du contrôle antidopage ; sinon, nous le fabriquons après la séance et le distribuons lors de la séance suivante.

Repères pour mener une plénière

Les plénières de synthèse impliquant les élèves sont souvent difficiles à mener, mais nous avons l'impression que, même lorsqu'elles ne se déroulent pas aussi bien que nous le souhaitons, il s'y joue plus de choses pour les élèves que lors d'une présentation impeccable d'une solution clairement expliquée. Lors de ces plénières, trois principes nous guident.

S'APPUYER LE PLUS POSSIBLE SUR LA DIVERSITÉ DES PRODUCTIONS

Permettre aux élèves d'être actifs en phase de recherche et de produire des solutions originales avec des méthodes diverses ne peut porter ses fruits que si les productions deviennent de véritables objets d'étude d'où va émerger la nouveauté. Nous veillons à appuyer nos plénières de synthèse sur les productions des élèves pour permettre à ces derniers d'établir des liens entre leurs démarches personnelles et ce qui émerge collectivement: c'est une façon de travailler la construction du sens.
Si les plénières étaient trop détachées des travaux des élèves, certains élèves risqueraient de ne plus bien comprendre pourquoi on leur demande de travailler personnellement pendant les phases de production, et pourraient se démobiliser pour les suivantes. Ainsi l'écrit qui est l'objet du débat en plénière est toujours extrait du travail des élèves ou élaboré à partir de leurs productions. Le risque est que le débat, même riche, ne mène pas au savoir visé et que les élèves ressentent comme une cassure, une mise en lien trop brutale de leurs productions artisanales et du savoir visé. Nous gardons les objectifs d'apprentissage en tête lorsque nous choisissons les extraits de productions avant la plénière, ou lorsque nous proposons d'examiner une question particulière au cours du débat. Nos choix permettent de poser des jalons intermédiaires entre les productions et les enseignements à en tirer, afin de réduire les écarts.

> Il n'est pas facile pour l'enseignant de faire en douceur le lien entre les productions des élèves et le savoir visé. La tentation de donner une solution de manière magistrale quand la classe n'avance plus est légitime mais, au fil du temps, on apprend à faire autrement.

FAIRE EN SORTE QUE TOUS LES ÉLÈVES SOIENT ACTIFS

En plénière, les apprentissages sont favorisés par l'activité des élèves. Or, le travail en grand groupe n'est propice ni à la prise de parole des élèves en difficulté ni à une concentration dans la durée. Nous essayons par exemple de repérer les élèves qui deviennent passifs, et leur demandons soit de dire ce qu'ils pensent de la dernière intervention, soit de reformuler quelque chose. Ou alors nous faisons un sondage: « Qui est d'accord ? » puis: « Leila, peux-tu dire pourquoi tu n'es pas d'accord ? » Il y a aussi d'autres manières d'agir pour éviter la démobilisation.

Cas des élèves en difficulté

En amont, nous avons aidé les élèves en difficulté de façon spécifique pour les préparer à la plénière. Nous savons donc à l'avance qu'ils sont en mesure d'intervenir de façon pertinente sur certains points. Ils expriment alors ce qu'ils ont « un peu compris » dans une situation humainement forte, dans l'envie de convaincre ou de « faire sa star ». Nous espérons que cela les amènera à mieux comprendre ou bien encore à être plus ouverts à ce qu'un autre va leur répondre.
Nous évitons tout échange duel visant à aider longuement un même élève au risque de le mettre publiquement mal à l'aise et de démobiliser certains autres. Si un tête-à-tête s'impose, nous informons l'élève qu'il aura lieu ultérieurement, à sa table.
En fin de plénière, nous faisons reformuler par des élèves faibles ce qui a été vu. Nous admettons une reformulation approximative en les valorisant, puis demandons à un élève plus à l'aise de reformuler.

Interrompre la plénière par de petits temps de réflexion personnelle suivis éventuellement d'un travail collectif

Un risque en plénière est que les échanges soient trop rapides pour certains élèves et qu'ils ne participent plus. Nous introduisons donc du temps entre les prises de parole, particulièrement entre une question posée et une réponse donnée. Nous essayons de bien repérer les élèves qui se démobilisent pour les aider à remonter dans le train quand ils en sont tombés. Nous donnons par exemple un temps de respiration à tous, en travail individuel très bref, avec des consignes précises: « Prenez 1 ou 2 min pour vérifier que –2 est solution de l'équation », « pour noter individuellement ce qu'on vient de découvrir à propos de cette fonction », « pour noter la propriété que vous pensez utile pour résoudre ce problème », « pour noter ce que vous pensez de l'intervention de Yassine », « pour réécrire ce petit passage qui a été beaucoup critiqué ». Ces petites pauses sont vraiment salutaires pour les plus lents.

> Sans une grande vigilance, on peut assez vite oublier d'introduire un temps de réflexion suffisant à la suite d'une question posée, et se laisser entraîner dans un ping-pong avec les élèves plus rapides. La pression de l'horloge est un véritable ennemi !

Un autre danger est de faire durer trop longtemps une plénière. Nous ne prévoyons donc pas un programme trop important et évitons par exemple la succession des neuf exposés de productions d'équipe. Quand, malgré nos précautions, la plénière dure trop, nous la scindons en organisant des réflexions individuelles très brèves ou de petites concertations sur des questions qui se posent. Cela remet en action ceux qui ont une tendance à l'écoute passive.

FAIRE S'EXPRIMER LES ÉLÈVES ET LEUR APPRENDRE À S'EXPRIMER

Au cours d'une plénière de synthèse, nous sollicitons beaucoup la parole de l'élève en lui demandant d'abord d'exprimer ses idées et de dire ce qu'il pense des idées des autres, puis de reformuler à sa façon ce qu'il a compris de l'intervention d'un camarade ou de l'état de la réflexion collective, et enfin de formuler ce qu'il a appris et ce qui pourrait être écrit en bilan. En s'exprimant en grand groupe, les élèves poursuivent le chemin amorcé en travail individuel puis en équipes. Ce travail oral rapproche progressivement les productions individuelles ou collectives des objectifs d'apprentissage.
L'oral constituant un véritable enjeu d'apprentissage, nous devons faire en sorte que tous s'expriment. Pendant le débat autour des productions, nous essayons d'éviter de reprendre trop tôt les élèves sur la correction de leur expression, afin de libérer leur parole et d'éviter le cumul des difficultés. Un élève interpellé trop vite sur la qualité de la langue a souvent tendance à moins s'impliquer par la suite, à prendre moins de risques. Dans un débat, les élèves s'expriment très librement pour être compris de leurs camarades. Certains demandent des précisions et poussent l'orateur à s'améliorer, ce que nous n'autorisons qu'une fois le débat un peu avancé.
Avec ces dispositifs, la résolution de problème constitue un très bon terrain pour développer les capacités d'expression des élèves. Nous essayons de ne pas perdre de vue cet objectif qui peut être atteint à la clôture du débat au moment de l'élaboration d'une solution collective. Le travail sur l'oral puis sur l'écrit peut être motivé par la recherche des traces à laisser sur les cahiers. C'est le temps des reformulations, de la correction de la langue et du langage mathématique. Bien sûr, les apprentissages mathématiques s'y poursuivent aussi. C'est aussi une bonne manière d'apprendre à mémoriser les propriétés au programme. Il nous semble plus efficace et motivant de faire reformuler et répéter une propriété ou une définition nouvelle en classe une dizaine de fois après qu'elle a été élaborée collectivement plutôt que de la donner à apprendre à la maison.

> Une question utile pour mesurer la qualité d'une plénière : combien d'élèves se sont exprimés et ont pu s'impliquer dans le débat ?

Techniques utiles pour les plénières

CHOIX DU SUPPORT ÉCRIT DU DÉBAT

Pour faciliter les prises de parole des élèves et être sûrs d'être au plus près de leur travail, nous faisons porter le débat sur un ou plusieurs écrits visibles par tous.

Extraits de productions écrits au tableau

Si les productions sont individuelles sur les cahiers de recherche, nous demandons à un ou plusieurs élèves, choisis très précisément grâce aux prises d'informations en cours de travail, d'expliquer aux autres leur démarche. Nous prenons quelques notes au tableau ou projetons le cahier de recherche.
Nous pouvons aussi demander à trois ou quatre élèves de venir simultanément au tableau pour y inscrire leur solution. Ces élèves peuvent être choisis en fonction de la diversité de leurs productions.

Élaboration de documents à étudier collectivement à partir des productions

À partir de productions individuelles ou collectives, rédigées directement sur feuille, à la maison ou en classe, nous trions les extraits correspondant à ce que nous voulons travailler collectivement et aux erreurs les plus répandues. Nous les assemblons sur un ou plusieurs documents en les numérotant pour indiquer l'ordre de passage (voir par exemple le document manuscrit avec des extraits de travaux d'élèves p. 109). Il nous arrive aussi d'écrire nous-mêmes une fausse production d'élève élaborée à partir de l'étude des erreurs commises. L'idéal est de préparer ces documents calmement à la maison (différer la synthèse est possible car nous menons plusieurs apprentissages de front) mais il nous arrive de le faire à chaud en classe, ce qui nécessite d'avoir pris connaissance des différentes productions pendant leur élaboration.

PROJECTION D'UNE SÉRIE DE PRODUCTIONS COLLECTIVES

Parfois, les productions collectives ont été faites et nous prévoyons de toutes les projeter, parce qu'elles ont nécessité beaucoup d'efforts et que les élèves doivent sentir leur travail reconnu. Nous les ordonnons préalablement, souvent en commençant par des productions moyennes ou mauvaises et en gardant les bonnes pour la fin – souvent mais pas systématiquement, sinon les élèves s'y habituent. Nous essayons d'anticiper sur la projection en nous demandant quel point chaque production permettra d'aborder.
Au-delà de cinq ou six productions, pour ne pas aboutir à une projection interminable et démobilisante, nous donnons du rythme en limitant le nombre de sujets débattus autour d'un même document. Si nécessaire, nous repasserons à la fin un des premiers documents.
Nous évitons d'exposer à la critique des productions très mauvaises car cela pourrait être long, inefficace et accablant pour les auteurs ; nous pointons brièvement en mode magistral les points forts susceptibles de les aider à progresser. Nous projetons plus longuement les textes imparfaits qui font l'objet de critiques susceptibles de faire émerger les critères de réussite. Ensuite, les bons textes ne seront pas forcément soumis à la critique directe mais plutôt passés rapidement au crible des critères de réussite précédemment élaborés. Pour éviter que la plénière ne devienne trop longue, il nous arrive de la clore artificiellement par un petit commentaire magistral sur la qualité de chacun des derniers bons textes projetés.

> Bien mener une projection s'apprend avec le temps. Ne pas trop prendre la parole tout en créant les conditions d'un véritable débat, ne pas trop guider, ne pas couper court pour passer au suivant sont des exercices difficiles pour le professeur.

ORGANISATION DE LA LECTURE DU SUPPORT ÉCRIT

Pour que le débat s'engage, les élèves doivent prendre connaissance de l'écrit qui va servir de support. Nous prévoyons un temps de lecture suffisant pour éviter de perdre d'emblée les mauvais lecteurs. Nous proposons aux élèves qui ont levé très vite la main pour réagir de noter leurs remarques sur leur cahier de recherche.
Les élèves ont souvent du mal à lire vraiment quand la consigne est seulement : « Lisez. » Nous annonçons un objectif de lecture tel que : préparer des critiques, proposer des améliorations, dire si l'on est d'accord sur la méthode utilisée, dire en quoi celle-ci diffère de la sienne.

INTERVENTIONS MAGISTRALES

Quand l'expression « l'élève au centre » a circulé et que le travail de groupes s'est un peu développé, les interventions magistrales sont devenues indésirables. L'idéal recherché était l'activité qui tourne toute seule en classe et qui permet aux élèves de construire leur savoir en totale autonomie. Nous ne pensons pas que s'interdire le magistral permette de mieux « mettre l'élève au centre ». L'intervention magistrale est un outil précieux, indispensable même dans une pratique centrée sur l'activité de l'élève. Utilisée à bon escient, elle crée de la sécurité dans la classe et aide l'élève à construire son savoir.
Nos interventions magistrales sont assez fréquentes mais limitées dans le temps et cadrées. Nous les utilisons pour institutionnaliser un nouveau savoir (voir p. 26), donner un conseil, mettre un nouveau savoir en perspective, remettre de l'ordre dans ce qui s'est dit, établir des liens, clore artificiellement un travail qui traîne sans être productif, parler de ce que feraient des mathématiciennes ou des mathématiciens dans ces circonstances. Parfois même, nous exposons magistralement une méthode inédite dans la classe : l'intervention magistrale est toujours suivie d'un temps d'appropriation.
Pour permettre aux élèves de bien identifier ce qui se joue au cours de ces dons magistraux et les aider à bien les vivre, nous les annonçons : « Je vais vous montrer quelque chose que vous ne connaissez sans doute pas. » ou « Je vais parler 2 min pour… » En outre, notre ton, notre posture par rapport à la classe changent légèrement, deviennent plus solennels. Nous ne sommes plus celui ou celle qui anime mais celui qui sait.
Nous nous donnons trois règles pour éviter les dérapages : nous n'utilisons pas le magistral pour expliquer mais pour exposer, nos interventions sont radicalement magistrales, elles sont brèves.

PROJECTION DE SOLUTIONS POUR CLORE UNE SÉRIE D'EXERCICES

Souvent, lors d'un entraînement technique un peu long, dans une phase de prise en main à proximité de l'élaboration, les élèves travaillent personnellement avec entraide. Les différences de rythme sont grandes, ce qui rend la synthèse périlleuse. En général, nous n'intervenons collectivement que sur les exercices que tous ont faits. Pour les autres, nous projetons un document avec les solutions afin que les élèves vérifient leur travail, avec comme consigne : « Contrôlez ce que vous avez fait et préparez des questions si nécessaire. Ne laissez pas passer une erreur sans chercher à la comprendre, ne recopiez pas une solution sans la comprendre : vous risqueriez de reproduire votre erreur la prochaine fois. »
Les questions sont posées publiquement, ou au moment où nous passons près de l'élève concerné. Nous glissons parfois une ou deux erreurs dans le corrigé pour éprouver le sérieux des élèves. D'autres fois, si peu d'élèves abordent les derniers exercices, nous leur demandons de faire le travail sur feuille afin que nous puissions le relever et l'annoter.

NOS SÉQUENCES

MODE D'EMPLOI

Ces séquences correspondent à la progression annuelle décrite p. 22. Un vidéoprojecteur et une caméra permettront de projeter les documents fournis et les productions des élèves. Le lecteur gardera à l'esprit que les mises en œuvre proposées ne peuvent pas correspondre exactement à ce qui se passera dans sa classe ; une adaptation aux réactions et aux propositions des élèves sera donc nécessaire.

DOCUMENTS EN LIGNE

Qu'ils soient projetés ou distribués, le lecteur trouvera l'ensemble des documents des séquences ainsi que les énoncés des exercices au format ODT sur l'espace en ligne du livre (reseau-canope.fr). À l'exception des exercices facilement identifiables par leur pictogramme, tous les autres documents (diaporamas, feuilles de calcul, fichiers GeoGebra et Python, démonstrations, résumés et bilans) apparaissent en couleur dans l'ouvrage : *Nous projetons le fichier* Point_mystère.ggb *pour créer des images mentales.*
L'espace en ligne comporte aussi des défis pour les débuts de séance (voir p. 34), des exercices supplémentaires pour les rapides ainsi que des exercices de prise en main et d'approfondissement.

PICTOGRAMMES

⏱ **3 h 15** Durée prévue pour la mise en œuvre de l'étape qui peut varier sensiblement selon la classe.

Énoncé d'un exercice, généralement distribué sous forme d'un petit polycopié à coller dans le cahier de bord ou, plus rarement, sur une copie, sauf quand il est précisé « Projeté » ou « Au tableau » dans le titre de l'exercice.

Automatisation d'une technique dans la durée (voir p. 31). Le professeur prend bonne note que ce type d'exercices doit être donné aussi longtemps que nécessaire, en débordant en général sur l'étape suivante, voire les séquences suivantes.

Démonstration au programme. Une fois la démonstration terminée ou plus tard (en même temps que sont donnés d'autres documents), nous distribuons un polycopié contenant la démonstration à coller dans le cahier de résumés.

ENCADRÉS

Les traces que les élèves doivent garder dans le cahier de bord sont indiquées dans les encadrés. Les textes que nous faisons recopier sont droits ; l'italique est utilisé pour les consignes à donner aux élèves.

TRAVAIL À LA MAISON OU EN CLASSE ?

Lorsqu'il est écrit **Travail à la maison**, l'exercice peut aussi être fait en classe, bien que cela prenne davantage de temps. En revanche, quand **Travail individuel** figure après l'énoncé, l'exercice est prévu en classe ; si on veut le donner à faire à la maison, il faut veiller à ce qu'il s'y prête (voir p. 44).

PASSAGE D'UNE ÉTAPE À UNE AUTRE

En général, les étapes se font les unes à la suite des autres (en dehors des automatisations dans la durée qui se prolongent), parfois après une interruption de quelques jours ou semaines. Les exercices d'approfondissement et certains exercices de prise en main peuvent être faits beaucoup plus tard, voire en fin d'année.

SÉQUENCE 1

Statistiques : fluctuations de fréquences (S1)

Au cycle 4, les calculs de fréquences ont été étudiés et différentes procédures de quatrième proportionnelle et de calculs de pourcentages ont été automatisées. Les élèves y ont utilisé l'écriture décimale ou fractionnaire d'un même nombre. En 3^e, la notion de fraction irréductible a été abordée, en lien avec celles de multiple et de diviseur.

PROGRAMME 2019

Statistiques et probabilités

– Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population.
– Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
– Faire percevoir [...] la fluctuation d'échantillonnage.

Nombres et calculs

– On réactivera [...] les formes décimales exactes de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, et des fractions pour $\frac{k}{5}$ pour k dans $\{1, 2, 3, 4\}$ et arrondies de $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.
– Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.
– Utiliser les notions de multiple, diviseur et nombre premier.
– Démonstration : le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Les élèves sont familiarisés à la fluctuation de fréquences, préparant ainsi l'étude des modèles probabilistes fréquentistes et de l'échantillonnage (attention : les exercices de cette séquence ne s'inscrivent pas dans le cadre de l'échantillonnage car les valeurs des séries statistiques considérées ne sont pas assimilables à des résultats d'expériences aléatoires indépendantes).
C'est l'occasion de retravailler la notion de fréquence d'une valeur dans une série statistique et ses écritures sous forme de pourcentage ou de fraction irréductible. La forme fractionnaire est l'occasion de reparler de multiples, diviseurs, nombres premiers et de démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
Le calcul de p % d'une quantité à l'aide de la multiplication par $\frac{p}{100}$ prépare la séquence « Pourcentages et coefficients multiplicateurs ».
L'**étape 1** regroupe la plupart des exercices, l'**étape 2** se limite à un devoir à la maison permettant d'entretenir des connaissances sur le tableur.

ÉTAPE 1

Fréquences, fluctuation de fréquences, fractions irréductibles

Phase de prise en main des notions de fréquence et de fraction irréductible | Phase d'élaboration de la notion de fluctuation de fréquences | ⏱ 3h15

EXERCICE DES LANCERS FRANCS

Sarah, joueuse de basket professionnelle, s'entraîne tous les jours aux lancers francs (voir résultats ci-dessous). Quel jour a-t-elle été la plus habile ? Quel jour a-t-elle été la moins habile ?

	LUNDI 27 AOÛT	MARDI 28 AOÛT	MERCREDI 29 AOÛT	JEUDI 30 AOÛT	VENDREDI 31 AOÛT
PANIERS TENTÉS	63	46	43	73	53
PANIERS RÉUSSIS	41	35	31	50	41

Pendant qu'un élève distribue les énoncés, nous projetons une image d'un lancer franc.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Un débat s'engage entre élèves qui comparent des nombres de paniers (réussis ou ratés) et ceux qui comparent des fréquences. Il émerge que ce sont les valeurs relatives qui sont importantes ici, pas les valeurs absolues. Le bon indicateur du jour où la joueuse a été la plus habile n'est pas le nombre de paniers réussis mais la proportion de paniers réussis parmi les paniers tentés, aussi appelée « fréquence de réussite ».

Nous rappelons la formule fréquence = $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$ et donnons un moyen mnémotechnique pour la calculer : « Elle a réussi 41 paniers *sur* 63 le lundi : la fréquence de réussite est de 41 *sur* 63. » Des valeurs approchées au centième des fréquences sont données, par exemple : $\frac{41}{63} \approx 0{,}65$, ce qui sous-entend que $0{,}645 \leq \frac{41}{63} \leq 0{,}655$. Puis elles sont écrites sous forme de pourcentage : $\frac{41}{63} \approx 65\ \%$.

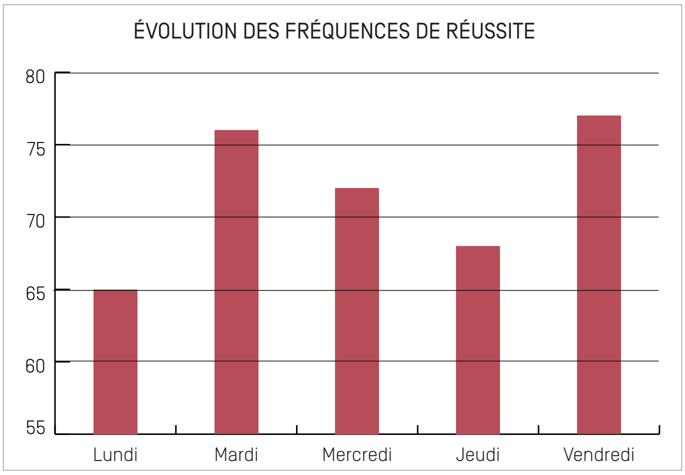
Si un élève dit que « pour passer de 0,65 à 65 %, on multiplie par 100 et on écrit % », nous ne le contredisons pas mais ne validons pas cette méthode car 0,65 × 100 correspond davantage à un effectif théorique qu'à une fréquence. L'écriture sous forme de pourcentage est interprétée : « Le lundi, si elle avait tenté 100 paniers en restant aussi habile, c'est-à-dire avec la même fréquence de réussite, elle aurait réussi environ 65 paniers. On peut dire que 41 pour 63, c'est comme 65 pour 100. »

La question de l'exactitude des résultats affichés par la calculatrice se pose. Nous retenons l'idée que si le nombre affiché occupe toute la largeur de l'écran, il est probable que le résultat affiché ne soit qu'une valeur approchée du nombre considéré.

Une fois l'exercice résolu, nous entraînons les élèves au calcul de fréquences à l'aide de petits exercices donnés un par un (**travail individuel très bref**).

1. Quel est le pourcentage de voyelles dans l'alphabet français ?
2. On effectue une enquête dans un quartier défavorisé. Dans la rue A, il y a 50 foyers et 37 ont un abonnement à internet. Dans la rue B, il y a 100 foyers et 82 ont un abonnement à internet Dans la rue C, il y a 200 foyers et 150 ont un abonnement à internet. Déterminez, sans calculatrice si possible, dans quelle rue les gens sont le plus abonnés.

Nous demandons ensuite comment faire percevoir efficacement l'évolution des fréquences de réussite sur la semaine. L'idée de faire un diagramme émerge et nous citons le scientifique écossais William Playfair : « En fait de calculs et de proportion, le plus sûr moyen de frapper l'esprit est de parler aux yeux[1]. » Nous proposons de faire ce diagramme avec un tableur : nous ouvrons le fichier Paniers.ods, insérons une ligne sous la première et demandons comment y faire apparaître les fréquences de manière économique (**travail individuel très bref**). Un élève prend les commandes et saisit les propositions de ses camarades. Lorsque les fréquences sont obtenues, il sélectionne les jours de la semaine et les fréquences puis, avec notre aide, passe en revue les diagrammes associés possibles. Le diagramme en bâtons ci-dessous est obtenu.



C'est l'occasion de faire un point d'histoire des mathématiques en mettant une mathématicienne à l'honneur. En nous appuyant sur des illustrations (diapositive 1), nous racontons l'histoire de Florence Nightingale. Entre 1853 et 1856, la guerre de Crimée oppose l'Empire russe à une coalition dont fait partie le Royaume-Uni. Elle y participe en tant qu'infirmière et constate que, parmi les soldats britanniques, les maladies telles que le typhus ou le choléra font plus de victimes que les blessures de combat. Dans le but d'améliorer la condition des soldats, elle fait des statistiques sur les causes de leur mortalité. Pour présenter ses résultats aux autorités responsables, elle fait un diagramme aujourd'hui célèbre (diapositive 2). Elle est à la fois une pionnière de l'utilisation des statistiques dans le domaine de la santé et de l'utilisation de la visualisation des données sous forme de diagramme. L'exploration et la visualisation de données sont aujourd'hui un domaine en plein essor qui recrute beaucoup de scientifiques et de graphistes. Nous projetons deux autres images (diapositives 3 et 4) et montrons les interactions en ligne possibles.

Les élèves écrivent le titre de la séquence.

Une quatrième ligne intitulée « Fréquence de réussite » est ajoutée au tableau et renseignée avec les fréquences et leurs arrondis au centième, par exemple : $\frac{41}{63} \simeq 0{,}65$. *Le diagramme en bâtons est collé.*

La fréquence de réussite de Sarah fluctue (varie) entre 65 % le lundi et 77 % le vendredi.

Donc c'est le vendredi qu'elle a été la plus habile et le lundi la moins habile.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous proposons aux élèves des calculs de fréquence comme dans les exemples ci-dessous.

1. En 2000 a eu lieu un recensement en Suisse. La population a été estimée à 7 300 000 personnes dont 4 650 000 parlaient allemand (source : OFS). Quel pourcentage de la population parlait allemand ?

2. Au 1er janvier 2018, il y avait en France 34 598 000 femmes et 32 395 000 hommes (source : Insee). Quelle était la proportion d'hommes ? Quelle était la proportion de femmes ?

1 William Playfair, *Statistical Breviary*, Londres, 1801.

3. Au Canada, en 2011, la langue parlée le plus souvent à la maison était (source : Statistique Canada) :
– l'anglais pour 22,0 millions de personnes ;
– le français pour 7,0 millions de personnes ;
– une autre langue pour 4,2 millions de personnes.
Quels étaient les pourcentages correspondants ?

4. Voici les résultats au bac d'un lycée général :
– section ES : 32 reçus, 3 ajournés (c'est-à-dire 3 ayant raté l'examen) ;
– section L : 18 reçus, 1 ajourné ;
– section S : 48 reçus, 7 ajournés.
Quel est le pourcentage de réussite au bac de ce lycée, toutes sections confondues ?

EXERCICE DES LANCERS FRANCS (SUITE)

Sarah s'entraîne encore chaque jour entre le 3 et le 7 septembre. Sur l'ensemble des deux semaines, sa fréquence de réussite fluctue entre 55 % et 77 % (les fréquences ont été arrondies au centième).
1. Est-il possible que le lundi 3, sur 50 paniers tentés, elle en ait réussi 4 sur 5 ?
2. Est-il possible que le mardi 4, sur 60 paniers tentés, elle en ait réussi 3 sur 4 ?
3. Le mercredi 5, elle a tenté 65 paniers. Que peut-on en déduire ?
4. (Question pour les rapides) Le jeudi 6, elle a réussi 56 paniers. Que peut-on en déduire ?

Travail individuel, puis en équipes. Nous aidons les élèves fragiles et attendons que toutes les équipes aient envisagé la question 3 avant de lancer la plénière.

Plénière. Questions 1 et 2. Le sens des expressions « 4 sur 5 » et « 3 sur 4 » est discuté.
Question 3. Les élèves peuvent tâtonner ou calculer 55 % de 65 et 77 % de 65, ce qui donne une idée des résultats. Différentes méthodes de calcul de 55 % de 65 et de 77 % de 65 sont comparées ; nous montrons l'intérêt de la multiplication par un coefficient multiplicateur. Nous entraînons les élèves à calculer un pourcentage d'une quantité : 15 % de 300 € ; 8 % de 1 350 000 ; etc. À la fin, un élève qui a réussi la question 4 donne le résultat final (sans aucun détail).

Traces des méthodes de calcul en précisant les prénoms des élèves qui les ont proposées.

EXERCICE DES POURCENTAGES ET FRACTIONS À CONNAÎTRE

FRÉQUENCE OU PROPORTION	FRACTION IRRÉDUCTIBLE ASSOCIÉE	EFFECTIFS PLUS PETITS ASSOCIÉS
10 %		10 pour 100, c'est comme ...... pour ......

Le tableau comporte ensuite les lignes 20 %, 25 %, 33,3 %, 40 %, 50 %, 60 %, 66,7 %, 75 %, 80 %.

Travail individuel pour compléter le tableau, entrecoupé par une **plénière de régulation** pour rappeler ce qu'est une fraction irréductible et expliquer ce qui est attendu dans la dernière colonne (par exemple : 50 pour 100, c'est comme 1 pour 2).

Plénière. Les lignes sont remplies dans l'ordre. Il est rappelé que $\frac{33,3}{100}$ n'est pas ce qu'on appelle une fraction car 33,3 n'est pas entier. Une fois proposé $\frac{333}{1000}$, nous demandons quelle méthode on pourrait employer pour démontrer que cette fraction est irréductible. La méthode basée sur les décompositions en facteurs premiers de 333 et de 1 000 est rappelée. **Travail individuel, puis en équipes** pour déterminer ces décompositions et pour conclure. Nous procédons de la même manière pour $\frac{667}{1000}$.

Le tableau est rempli. Sur la ligne de 33,3 %, les élèves écrivent :
« $\frac{333}{1000}$ ou environ $\frac{1}{3}$ » puis « 33,3 pour 100, c'est comme 1 pour 3 environ ».

Ces résultats sont utiles dans la vie courante, c'est pourquoi nous demandons aux élèves d'apprendre le tableau par cœur en **travail à la maison**, puis nous faisons une **plénière** pour interroger rapidement les élèves. Quand nous le jugerons opportun, nous distribuerons les résumés Multiples, diviseurs et nombres premiers et Fréquences et pourcentages (exemples).

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

– Appliquer un pourcentage ou une proportion assimilable à une fréquence. Exemple : La France comporte 67 millions d'habitants dont les trois quarts aiment le couscous. En France, combien d'habitants aiment le couscous ?
– Faire le lien entre calcul d'un pourcentage et multiplication. Exemple : Pour calculer 7 % d'une quantité, il suffit de multiplier cette quantité par un nombre. Lequel ?
– Faire le lien entre pourcentage et fraction. Exemples : Complétez la phrase : « 1 Français actif sur 10 est au chômage. Cela correspond à … % de la population française active. » Complétez avec des nombres entiers strictement positifs les plus petits possibles la phrase : « 20 % des Européens mangent des huîtres. Autrement dit … Européen(s) sur … mange(nt) des huîtres. »
– Écrire des fractions sous forme irréductible, sans calculatrice. Exemples : $\frac{65}{100}$; $\frac{24}{50}$; $\frac{4}{5}$; la proportion de chocolats au lait dans une boîte de 84 chocolats comprenant 48 chocolats au lait.

EXERCICE DU BACCALAURÉAT

Voici un graphique représentant les onze fréquences de réussite au baccalauréat entre 2005 et 2015, toutes filières confondues.

En 2014, il y a eu 686 907 candidats au bac (Source : *Libération*).
Que peut-on dire du nombre d'élèves qui ont réussi le bac en 2014 ?

Les élèves lisent l'énoncé et la signification d'une des croix est donnée. **Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.**

Pendant la reformulation en fin de plénière, nous écrivons le bilan sous la dictée de quelques élèves, d'autres proposant des ajustements. Le bilan est recopié.

EXERCICE DU RADAR

Un radar de la sécurité routière prend en photo les véhicules en excès de vitesse. Sur certaines photos, il n'est pas possible de lire le numéro d'immatriculation du véhicule, on dit alors que la photo est ratée ; dans le cas contraire, on dit qu'elle est réussie.

Le radar a pris des photos pendant l'été :
– en juin, il y a eu 58 photos prises dont 17 ratées ;
– en juillet, il y a eu 75 photos prises dont 60 % réussies ;
– en août, il y a eu 48 photos réussies, ce qui correspondait aux deux tiers des photos prises ;
– en septembre, il y a eu 14 photos ratées, ce qui correspondait à 20 % des photos prises.
Sur l'ensemble de ces quatre mois, quel a été le pourcentage de photos réussies ?

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Nous donnons d'abord la parole à un élève qui fait la moyenne des pourcentages de photos réussies. Cette démarche est invalidée à l'aide d'un contre-exemple parlant. Diverses méthodes de calcul des nombres de photos prises en août et septembre sont proposées.

Le bilan est fait à l'aide du bilan S1 n° 1 contenant un tableau récapitulatif et quelques calculs.

LE NOMBRE RATIONNEL $\frac{1}{3}$ N'EST PAS DÉCIMAL

Plénière de démonstration. Nous demandons quels nombres du tableau du résumé Fréquences et pourcentages (exemples) ne sont pas des nombres décimaux. Un élève propose $r = \frac{1}{3}$ et nous annonçons que nous allons le démontrer.

Nous allons raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer que r est décimal.
Question : Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?
Donc si r est un nombre décimal, il est le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10.
D'après l'égalité des produits en croix, cette puissance de 10 est divisible par 3.
Question : Rappelez un critère de divisibilité par 3.
Question : Quelle est la somme des chiffres d'une puissance de 10 ?
La somme des chiffres de la puissance de 10 est égale à 1, donc elle n'est pas divisible par 3.
Il est donc absurde de supposer que r est décimal.

La démonstration Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal est collée dans le cahier de résumés.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Sans calculatrice, dire si un nombre tel que $\frac{4}{3}$ ou $\frac{45}{30}$ est décimal et, si c'est le cas, en donner une écriture décimale.

ÉTAPE 2

Devoir à la maison, utilisation du tableur

Phase de prise en main de la notion de fluctuation de fréquence et de l'utilisation du tableur | 15 minutes

EXERCICE DES BULLETINS BLANCS

Le 7 mai 2017 s'est tenu le second tour de l'élection présidentielle française. En France, le nombre total de votants fut de 34 887 208. Parmi ces votants, 1 056 125 ont déposé un bulletin blanc dans l'urne.
À Nantes, le nombre total de votants fut de 140 650. Parmi ces votants, 11 178 ont déposé un bulletin blanc dans l'urne (source : data.nantes.fr).

NB : Un vote est comptabilisé comme bulletin blanc lorsque le bulletin est vierge ou lorsque l'enveloppe ne contient aucun bulletin.

1. Quel est le pourcentage de votants ayant déposé un bulletin blanc en France ? À Nantes ?
L'écart entre ces deux pourcentages vous semble-t-il faible ou important ?

2. Parmi les votants nantais, environ 10,14 % ont voté par procuration.
Déterminez une valeur approchée du nombre de procurations à Nantes.

3. Dans le bureau 153 de l'école primaire Léon-Say, parmi les 800 votants, 64 ont voté blanc.
Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers de 64, puis celle de 800.
Déduisez-en une fraction irréductible égale à la fréquence des bulletins blancs par rapport au nombre de votants.

4. Si on considère tous les bureaux de vote nantais, la fréquence de bulletins blancs par rapport au nombre de votants fluctue entre 0,048 et 0,114. Dans le bureau 452 de l'école Réformes, il y a eu 450 votants.
Que peut-on dire du nombre de bulletins blancs dans ce bureau ?

5. Dans la feuille de calcul **Bulletins_blancs_Ile_de_Nantes.ods**, on a répertorié le nombre de bulletins blancs et le nombre de votants de chacun des dix bureaux de vote de l'Île de Nantes, situés dans les écoles Gustave-Roch et Louise-Michel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	École	Gustave Roch					Louise Michel					
2	Numéro du bureau de vote	351	352	353	354	355	361	362	363	364	365	TOTAL
3	Nombre de votants	689	674	653	820	895	811	649	645	875	505	
4	Nombre de bulletins blancs	46	47	62	51	59	70	63	47	79	34	
5	Fréquence des bulletins blancs par rapport au nombre de votants											

Attention ! Vous n'avez pas à remplir le tableau imprimé ci-dessus ni à rendre l'énoncé.

5.1. Quelles formules peut-on écrire dans les cellules L3 et L4 pour que le nombre total de votants et de bulletins blancs dans les dix bureaux de vote s'affiche automatiquement ?

5.2. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B5, avant de la recopier dans les cellules de droite, pour que s'affichent automatiquement les fréquences de bulletins blancs de chacun des dix bureaux de vote et de l'ensemble des dix bureaux ?

5.3. Complétez la feuille de calcul avec les formules précédentes.
Déduisez-en deux fréquences entre lesquelles fluctuent les fréquences de bulletins blancs par rapport au nombre de votants de ces dix bureaux de vote.

Parmi les quatre questions suivantes, vous devez en traiter au moins deux. Les questions 8 et 9 sont plus difficiles.

6. Est-il possible que dans un des bureaux de vote de Nantes, 1 bulletin sur 20 ait été blanc ?
Même question avec 1 bulletin sur 30.

7. Pour le bureau de vote 252 de l'école François-Dallet, le nombre de bulletins blancs est 73, ce qui représente exactement 9,125 % des votants. Quel est le nombre de votants dans ce bureau de vote ?

8. Un bulletin peut être exprimé, blanc ou nul. Déterminez deux fréquences entre lesquelles fluctuent les fréquences des bulletins exprimés ou nuls pour les bureaux de vote de Nantes.

9. Dans les bureaux de vote 531, 532, 533 et 534 de l'école Dervallières-Chézine, les pourcentages de bulletins blancs par rapport au nombre de votants sont respectivement d'environ : 8,1 % ; 7,6 % ; 5,9 % et 7,1 %.
Que peut-on dire du pourcentage de bulletins blancs par rapport au nombre de votants pour ces quatre bureaux de vote réunis ?

Devoir à la maison. Les élèves ont une semaine pour rendre ce travail. Nous leur expliquons ce qu'est un votant, un bulletin blanc et une procuration. Ils récupèrent Bulletins_blancs_Ile_de_Nantes.ods via leur ENT. Ce fichier servira pour faire l'exercice mais les élèves n'ont pas à nous l'envoyer. Ils doivent rendre seulement leur copie.

Une fois les copies examinées, nous revenons quelques minutes sur l'exercice en projetant des extraits de copies. Les élèves s'expriment sur les pourcentages obtenus à la question 1 : il apparaît que 7,9 % de bulletins blancs, c'est nettement plus que 3 % ! Ensuite, le fichier Bulletins_blancs_Ile_de_Nantes.ods est projeté et un élève saisit les formules demandées.

SÉQUENCE 2

Séries statistiques (S2)

Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur des données statistiques présentées sous forme de tableaux, diagrammes, histogrammes ou autres graphiques. Ils ont calculé et interprété des indicateurs de position (moyenne, médiane) et de dispersion (étendue) d'une série statistique.

PROGRAMME 2019

- On introduit la notion de moyenne pondérée et deux indicateurs de dispersion : écart interquartile et écart type.
- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
- Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Linéarité de la moyenne.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

- **Étape 1** : Comparaison de deux séries statistiques en terme de position. Indicateurs de position : moyenne et médiane (vus au cycle 4), premier et troisième quartiles (nouveautés de seconde). Moyenne pondérée par des effectifs, des coefficients ou des fréquences.
- **Étape 2** : Comparaison de deux séries statistiques en terme de dispersion. Indicateurs de dispersion : étendue (vue au cycle 4), écart interquartile et écart type (nouveautés de seconde). Étude d'une série statistique à l'aide de la calculatrice. Devoir de synthèse sur tableur à partir de données téléchargées sur le site de l'Insee.
- **Étape 3** : Effet d'une transformation affine des données sur les indicateurs. Linéarité de la moyenne.

PARTIS PRIS CONCERNANT MÉDIANE ET QUARTILES

En ce qui concerne la définition d'une valeur médiane, pour être en accord avec ce qui nous semble être l'esprit des statistiques descriptives, nous ne rentrons pas dans les considérations liées à la parité du nombre de valeurs de la série : nous nous contentons de dire qu'une valeur médiane est telle qu'environ 50 % des valeurs de la série lui sont inférieures et environ 50 % lui sont supérieures. Les quartiles sont définis dans le même esprit.

En outre, bien que l'on puisse en général choisir plusieurs valeurs médianes, nous ne nous interdisons pas de dire *la* médiane. Même chose pour *le* premier quartile et *le* troisième quartile.

ÉTAPE 1

Indicateurs de position

Phase de prise en main des notions de moyenne et de médiane |
Phase d'élaboration des notions de quartiles et de moyenne pondérée | ⏱ 3h30

EXERCICE DES DEUX MAGASINS

Voici les prix de 24 produits dans deux magasins.
Dans quel magasin les prix sont-ils les moins élevés ?

	MAGASIN 1	MAGASIN 2
Produit A	10,5	10
Produit B	1,1	0,99
Produit C	1,99	1,7
Produit D	32	36
Produit E	1,79	1,5
Produit F	2,4	2,4
Produit G	2,49	2,2
Produit H	6	4,99
Produit I	0,59	0,49
Produit J	10,99	9,99
Produit K	2	1,75
Produit L	3,6	3,6
Produit M	1,8	1,5
Produit N	4,99	5,99
Produit O	14,99	18,99
Produit P	1,3	1,2
Produit Q	8	9
Produit R	5,99	5
Produit S	11,99	10,29
Produit T	22	20
Produit U	5,99	5,5
Produit V	250	299
Produit W	29,99	28
Produit X	8,5	8,99

Les objectifs principaux de cet exercice sont d'une part de réactiver les notions de moyenne, de médiane et d'indicateur de position, d'autre part d'introduire les notions de premier et troisième quartiles.

Travail individuel, puis plénière. La feuille de calcul Deux_magasins.ods est projetée.

RÉACTIONS ET PROPOSITIONS D'ÉLÈVES	SUITE QUI EST DONNÉE
On ne peut pas répondre car ça dépend des produits.	Certes mais on peut quand même donner des tendances générales. C'est ce qu'on fait souvent en statistiques, quitte à perdre un peu d'information.
Comparer les produits les moins chers (ou les plus chers).	Il s'agit donc de faire intervenir le *minimum* ou le *maximum* des séries. L'inconvénient du *minimum* et du *maximum*, c'est qu'ils ne concernent que peu de produits.
C'est le magasin 1 car la *moyenne* est de 18,40 € contre 20,40 € dans le magasin 2.	Nous vérifions les calculs à l'aide de la commande MOYENNE du tableur. Mais si on ne tient pas compte du produit V (comme vélo !), les deux moyennes sont quasiment égales (nous les calculons à l'aide du tableur). La moyenne brute a ses limites.
Si on achète tout, il est plus intéressant de faire ses courses dans le magasin 1.	Cela revient à comparer les moyennes.
C'est le magasin 2 car il y a plus de produits moins chers (16 contre 6).	C'est un point de vue intéressant mais qui a également ses limites car un écart de prix de 1 ct ou de 100 € est pris en compte de la même manière.
On utilise la *médiane*.	Des élèves en rappellent la définition. Nous donnons ensuite notre point de vue concernant cette définition (voir présentation de la séquence). Une fois que l'idée de trier les données par ordre croissant a émergé, en prévision du devoir à la maison de la fin de l'étape 2, nous montrons comment ouvrir une nouvelle feuille, coller les prix des deux magasins et trier par ordre croissant chacune des deux listes. Nous distribuons alors le document Prix triés qui reprend ce même tableau contenant les prix des 24 produits triés par ordre croissant : **travail individuel très bref** pour déterminer une médiane de chaque série. Pour le magasin 1, on prend 5,99 €. Pour le magasin 2, on peut choisir n'importe quel nombre entre 5 € et 5,50 €, même si 5,25 € semble la meilleure valeur. Donc, si on se fie aux médianes, c'est le magasin 2 le moins cher, contrairement à ce qu'on avait obtenu avec les moyennes.

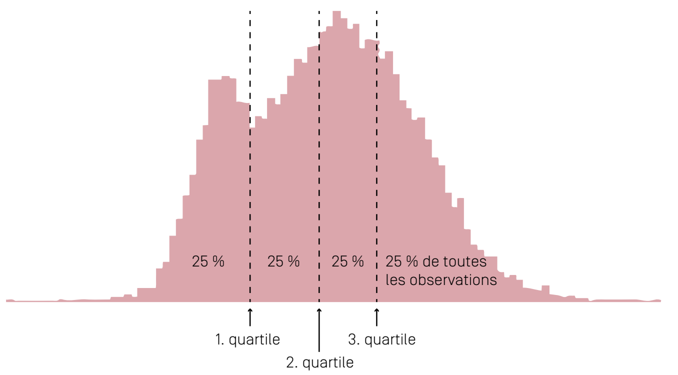
Nous disons : « Pour affiner la réponse, on peut aussi utiliser d'autres indicateurs de position que la moyenne et la médiane. Ces indicateurs sont des nombres qui donnent une indication intéressante sur les "positions" (les "hauteurs", les "niveaux") des valeurs de la série. Attention cependant : ils ne donnent que des indications, on ne peut pas résumer une série de valeurs à ses indicateurs. Pour aller plus loin, nous allons utiliser d'autres indicateurs de position. Que proposez-vous ? »

Les élèves proposent à nouveau le minimum et le maximum. Ce sont bien des indicateurs de positions, mais ils ne sont pas très significatifs. Un élève propose l'étendue. Nous mettons en garde contre cette erreur : c'est un indicateur de dispersion, pas de position.

Nous disons alors qu'il existe des indicateurs de la même famille que la médiane et arrivons ainsi à la définition des quartiles Q_1, Q_2, Q_3 et des déciles D_1, …, D_9 en faisant remarquer que Q_2 et D_5 équivalent à la médiane. Seuls les quartiles sont au programme de seconde.

Le document Prix triés est collé. Le bilan S2 n° 1 ci-dessous est distribué et collé. Le diagramme qu'il contient est commenté.

Les quartiles Q_1, Q_2 et Q_3 d'une série statistique sont trois quantités qui partagent la liste ordonnée des valeurs de la série en quatre sous-listes ayant à peu près le même nombre de valeurs, c'est-à-dire environ 25 % des valeurs. Q_1 est appelé le premier quartile et Q_3 le troisième quartile. Le deuxième quartile Q_2 correspond à la médiane.



Source : statistics4u.com/fundstat_eng/cc_quartile.html

Travail individuel, puis en équipes pour déterminer les quartiles des magasins 1 et 2, puis **plénière**. Une fois qu'est donnée l'idée de partager chaque liste en quatre groupes de six produits, nous mettons un fond gris sur les lignes 1 à 6 et 13 à 18 des données triées. Il apparaît que les premier et troisième quartiles sont inférieurs dans le magasin 2. Puis nous travaillons l'oral en demandant à plusieurs élèves, les uns après les autres, de faire une phrase qui explique ce que signifie, par exemple : « Le premier quartile de la série 1 est 2 €. »

En guise de premières utilisations, nous demandons les trois quartiles de chacune des deux séries suivantes (**travail individuel très bref** pour chaque série), puis faisons travailler oralement la signification de ces quartiles comme précédemment.

Nombre d'élèves des 32 classes du lycée (projeté)
17 . 20 . 24 . 28 . 28 . 29 . 30 . 30 | 30 . 30 . 31 . 31 . 31 . 31. 31 . 32 | 32 . 33 . 33 . 33 . 34 . 34 . 34 . 34 | 35 . 35 . 35 . 35 . 35 . 35 . 35 . 35

Âges des membres d'un club de ping-pong (projeté)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8
2	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9
3	9	10	10	10	10	10	10	10	11	11
4	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13
5	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15
6	15	15	15	16	16	16	17	17	17	17
7	18	18	22	22	23	28	30	31	36	40
8	41	43	44	47	47	50	52	55	60	63

Le bilan est fait à l'aide du bilan S2 n° 2 ci-dessous. Nous y avons volontairement glissé deux fois l'erreur « indicateur de dispersion » (à remplacer par « indicateur de position »).

	MAGASIN 1	MAGASIN 2
Nombre de produits moins chers	6	16
Moyenne	18,40 €	20,40 €
Premier quartile	2 €	1,72 €
Médiane	5,99 €	5,25 €
Troisième quartile	11,50 €	10,10 €

Si l'on se fie aux nombres de produits moins chers, le magasin le moins cher est le 2 mais cet argument ne tient pas compte des écarts entre les prix.
Pour répondre, on peut aussi utiliser des indicateurs de dispersion des séries de prix.
Choix 1. Si l'on se fie à la moyenne, le magasin le moins cher est le 1. Mais ce n'est pas très significatif car la moyenne du magasin 2 est plus élevée surtout à cause du produit V. D'ailleurs, si on enlève le produit V, la moyenne est moins élevée dans le magasin 2.
Choix 2. Si l'on se fie à trois autres indicateurs de dispersion (premier quartile, médiane, troisième quartile), le magasin le moins cher est le 2.

Nous demandons enfin comment répondre à la question de départ (**travail individuel très bref**). Lors du débat, nous disons que, selon ce que l'on privilégie, on doit choisir un indicateur ou un autre (voir ci-dessous). On peut conclure de la manière suivante, mais ce n'est pas la seule manière de répondre.

Si on privilégie les produits courants, la moyenne n'est pas un bon indicateur car le produit V fait beaucoup augmenter la moyenne du magasin 2. Il vaut mieux choisir les trois quartiles qui ne changent pas si on change un peu le maximum. Donc on peut considérer que dans le magasin 2, les produits courants sont moins chers.

EXERCICE DES SALAIRES

Derrière le salaire moyen, de fortes disparités

« Hier, l'Acoss, l'organisme qui fédère les organismes de Sécurité sociale, révélait que le salaire moyen par tête avait augmenté de 0,3 % au 4e trimestre 2013 dans le secteur privé, atteignant 2 449 € mensuel. Un chiffre qui a étonné nombre d'internautes du *Figaro*. Certains le trouvant élevé, d'autres trop faible ! Le fait est que ce chiffre n'est qu'une moyenne. Il ne signifie pas que la majorité des Français touchent tous les mois cette somme. Il représente seulement la masse salariale par rapport au cumul des rémunérations brutes des salariés, avec de très hauts et de très bas salaires.

7 800 € par mois

Plus significatif est le salaire médian. S'élevant, selon les dernières données disponibles, à 1 675 € bruts mensuels, ce dernier sépare les 50 % des Français qui gagnent moins que cette somme de l'autre moitié qui gagne plus.
Derrière ces chiffres, les disparités restent importantes. Selon l'Insee, les 10 % de salariés les moins bien payés touchent en moyenne un salaire net mensuel de 1 170 €. À l'inverse, les 10 % de salariés les mieux rémunérés disposent, eux, de plus de 3 400 €. Pour faire partie du "top" – les 1 % des Français les mieux payés –, il faut afficher une feuille de paie supérieure à 7 800 € par mois. »

© Marie Visot, « Derrière le salaire moyen, de fortes disparités », in lefigaro.fr, 13 mars 2014.

Les questions suivantes concernent les salaires bruts du secteur privé au quatrième trimestre de 2013.
1. Quel est le salaire moyen ?
2. Quel est le salaire médian ?
3. Indiquez sur la première ligne ci-dessous les quatre pourcentages manquants.

……% des salaires du privé	……%	……%	……%

salaire minimum — 1 675 € — 3 400 € — 7 800 € — salaire maximum

4. Donnez le meilleur encadrement possible du troisième quartile de la série des salaires : …… ≤ Q_3 ≤ …….
5. Comment expliquer un si grand écart entre le salaire moyen et le salaire médian ?

Les élèves lisent l'article, puis posent des questions. Nous précisons que le salaire moyen correspond à la moyenne des salaires et que le salaire médian correspond à la médiane des salaires.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Pour la question 5, le cas des très hauts salaires de certains footballeurs est évoqué et le parallèle avec les prix du magasin 2 est fait.

1 à 4. *Les élèves recopient les bonnes réponses.*
5. Les salaires les plus élevés sont peu nombreux mais très élevés. Ils sont beaucoup plus éloignés du salaire médian que les plus bas salaires qui sont autour de 1 000 €. Donc les gros salaires tirent la moyenne vers le haut sans avoir de grande influence sur la médiane.

EXERCICE DES RETARDS

Une association de consommateurs a testé la ponctualité de 111 trains entre Orléans et Paris.

RETARD (MIN)	0	2	4	6	8	10	15	20	25	120
EFFECTIF	26	48	17	5	4	4	2	3	1	1

1. Déterminez le retard moyen des 111 trains, le retard médian ainsi que les premier et troisième quartiles.
2. Imaginez un slogan publicitaire que la SNCF pourrait diffuser pour vanter la ponctualité des trains d'Orléans à Paris. Ce slogan doit faire intervenir un indicateur de position.
3. L'employeur d'un usager de cette ligne lui reproche d'arriver régulièrement avec plus de 5 minutes de retard au travail. Quel argument cet usager pourrait-il utiliser pour se défendre ? Cet argument doit faire intervenir un indicateur de position.

Les élèves lisent l'énoncé, puis nous demandons la signification des nombres de la deuxième ligne du tableau.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. L'erreur qui consiste à calculer la moyenne sans tenir compte des effectifs est exhibée, puis la bonne méthode de calcul est donnée oralement.

Travail en équipes. Pour les questions 2 et le 3, chaque équipe prépare un slogan et un argument qu'un rapporteur lira devant la classe.

Plénière. Une fois le retard moyen obtenu, un élève propose 9 minutes pour la médiane parce qu'il ne tient pas compte des effectifs. Nous demandons s'il est exact qu'environ 50 % des retards sont supérieurs à 9 minutes, puis l'erreur est analysée. Enfin, des élèves exposent les raisonnements corrects pour la médiane et les quartiles. Pour les illustrer, nous représentons au tableau la liste ordonnée des 111 retards et de leurs numéros d'ordre.

RETARD	0	0	0	....	0	2	2	....	2	4	4	....	120
N° D'ORDRE	1er	2e	3e	....	26e	27e	28e	....	74e	75e	76e	....	111e

Les rapporteurs lisent ensuite leurs slogans et leurs arguments, dont voici deux bons exemples.
– La SNCF : « Vous voulez arriver à l'heure (*) ? Prenez le train ! »
Et en petit, plus bas : « (*) Seulement deux minutes de retard médian sur 111 trains. »
– L'employé : « C'est pas de ma faute : sur cette ligne, les trains ont 5 minutes de retard en moyenne ! »
Nous gardons une trace des propositions des élèves en prévision du document que nous distribuerons.

La SNCF et l'employé ont des intérêts opposés. L'employé a intérêt à exhiber le retard moyen, même s'il n'est pas très significatif, et à l'arrondir à 5 minutes. Selon ce que l'on privilégie, on doit choisir un indicateur ou un autre. Nous concluons : « L'apprentissage des statistiques participe à la formation du citoyen. Parfois, des personnes mal intentionnées choisissent d'exhiber tel ou tel indicateur par intérêt, avec une certaine mauvaise foi, et vous devez pouvoir faire preuve de sens critique. »

1. **Moyenne pondérée par les effectifs**

$$\frac{0 \times 26 + 2 \times 48 + \ldots + 120 \times 1}{111} \simeq 4{,}51$$

Le retard moyen est donc de 4 minutes 30 environ.

Quartiles
$111 \div 2 = 55{,}5$ Comme $26 < 55$ et $26 + 48 > 55$, les 55e et 56e retards sont de 2 minutes.
Donc le retard médian est de 2 minutes.
$\frac{1}{4}$ de $111 \simeq 28$. Le 28e retard est de 2 min. Donc $Q_1 = 2$ min.
$\frac{3}{4}$ de $111 \simeq 83$. Le 83e retard est de 4 min. Donc $Q_3 = 4$ min.

Un document contenant des exemples de slogans et d'arguments donnés par les élèves est collé.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Calculs de médianes, de quartiles et interprétation des résultats à l'aide de phrases.

EXERCICE DU BAC S

Stéphanie s'apprête à passer son bac S en juin 2019. Comme elle très forte en maths, elle a choisi cette spécialité en terminale, dont le coefficient est alors de 9. Elle saisit, dans le simulateur de moyenne ci-contre, ses notes au bac blanc et aux épreuves anticipées de français.
Avec ces notes, Stéphanie aurait-elle eu le bac ?
N.B. : On obtient le bac lorsque la moyenne générale est supérieure ou égale à 10.

Epreuves anticipées	Coeff.	Note
Français *écrit*	2	5
Français *orale*	2	6
Epreuves terminales	**Coeff.**	**Note**
Histoire-géographie *écrit*	3	7
Mathématiques *écrit*	9	20
Physique-chimie *écrit et pratique*	6	9
SVT *écrit et pratique*	6	8
Langue vivante 1 *écrit et orale*	3	5
Langue vivante 2 *écrit et orale*	2	4
Philosophie *écrit*	3	8
EPS *contrôle continu*	2	5

Source : sujetdebac.fr

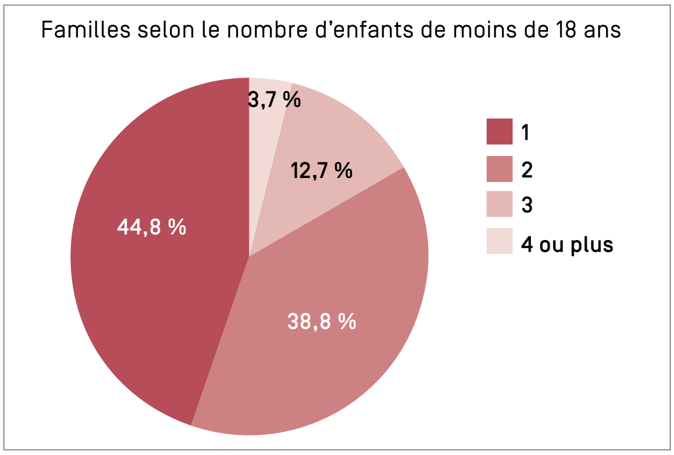
Travail à la maison. Avant le cours, nous ouvrons le simulateur de moyenne et saisissons toutes les notes : nous allons sur sujetdebac.fr > Simulateur de notes > Simulateur de moyenne au bac S[2].

Plénière. Nous cliquons sur « Calculer ma note » pour vérifier des propositions d'élèves.

Les élèves recopient le calcul de la moyenne accompagné de la mention : moyenne pondérée par les coefficients.

EXERCICE DU NOMBRE D'ENFANTS

Ce diagramme circulaire indique la répartition des familles ayant au moins un enfant de moins de 18 ans en 2015 (source : Insee).
1. Déterminez le nombre moyen d'enfants de moins de 18 ans de ces familles.
2. (Question pour les rapides) Dans une population dont 40 % des membres ont 60 ans, est-il possible que l'âge moyen de la population soit de 30 ans ?



Les élèves lisent l'énoncé, puis posent des questions. La signification des pourcentages est donnée et il est rappelé que les angles au centre des secteurs sont proportionnels aux pourcentages.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Un élève dit qu'on ne peut pas calculer la moyenne car on ne connaît pas le pourcentage exact des familles de 4 enfants, 5 enfants, etc. On en arrive à l'idée que les familles de 5 enfants ou plus étant rares, on ne se trompe pas beaucoup en faisant comme si elles avaient exactement 4 enfants. Avec cette hypothèse supplémentaire, on peut alors faire un calcul dont le résultat sera proche de la moyenne cherchée.

2 Lien direct : sujetdebac.fr/dossiers-outils/simulateur-notes/bac-s

Travail en équipes, puis plénière. Un élève propose 1 × 0,448 + 2 × 0,388 + 3 × 0,127 + 4 × 0,037 = 1,753 sans pouvoir le justifier. Un autre propose de faire comme s'il y avait 100 familles au total. Nous disons que c'est une bonne idée et demandons à chacun de faire le calcul, ceux qui l'ont déjà fait devant considérer d'autres effectifs globaux que 100 (**travail individuel très bref**). Une fois le calcul terminé et le fait que le résultat ne dépend pas de l'effectif total conjecturé, nous démontrons magistralement que, pour tout nombre total de familles N, le nombre moyen d'enfants est :

$$\frac{1 \times (0{,}488N) + 2 \times (0{,}388N) + 3 \times (0{,}127N) + 4 \times (0{,}037N)}{N} = 1 \times 0{,}488 + 2 \times 0{,}388 + 3 \times 0{,}127 + 4 \times 0{,}037 = 1{,}753$$

Ce calcul valide également la proposition du premier élève. Nous disons alors aux élèves qu'ils pourront désormais faire de la sorte pour calculer une moyenne lorsqu'ils connaissent seulement les fréquences des différentes valeurs.

Si on tient maintenant compte des familles de plus de 4 enfants, la moyenne augmente, probablement juste un peu. Finalement, on peut dire que la moyenne est probablement légèrement supérieure à 1,753.

Nous passons à une première utilisation et projetons la question suivante (**travail individuel très bref**).

Une auto-école publie les statistiques du nombre de tentatives dont ses élèves ont eu besoin pour obtenir le permis de conduire.

NOMBRE DE TENTATIVE(S)	1	2	3	4	5
POURCENTAGE D'ÉLÈVES	46 %	28 %	19 %	6 %	1 %

Quel est le nombre moyen de tentative(s) des élèves de cette auto-école ?

Pour terminer, nous demandons les trois quartiles de la série des nombres d'enfants (**travail individuel très bref**). Un élève expose son raisonnement pour trouver médiane et quartile. Nous l'illustrons en projetant le document Liste ordonnée de nombre d'enfants ci-dessous.

Nombre d'enfants de moins de 18 ans rangés par ordre croissant

1-1-........-1-2-2-........-2-3-3-........-3-4-4-........

← 44,80 % des familles →← 38,80 % →← 12,70 % →← 3,70 % →

Le fait que la médiane est égale au troisième quartile est souligné.

Faisons d'abord comme si chacune des familles de 4 enfants ou plus en avait exactement 4.
On a démontré que la moyenne pouvait alors s'obtenir à l'aide de la moyenne pondérée par les fréquences :
1 × 0,448 + 2 × 0,388 + 3 × 0,127 + 4 × 0,037 = 1,753
Tenons maintenant compte des familles de 5 enfants ou plus. La moyenne est supérieure à 1,753 enfant, probablement seulement légèrement supérieure.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Calcul d'une moyenne pondérée par des effectifs, des coefficients ou des fréquences.

ÉTAPE 2

Indicateurs de dispersion

Phase de prise en main de la notion d'étendue | Phase d'élaboration des notions d'écart interquartile et d'écart type | 2h15

EXERCICE DU CACAO

Un artisan chocolatier et une usine de fabrication de chocolat produisent des tablettes de chocolat sur lesquelles est écrit « 70 % de cacao ». Un contrôleur de qualité mesure les pourcentages de cacao dans un échantillon de tablettes de l'artisan et dans un échantillon de tablettes de l'usine. Ses résultats sont consignés dans les tableaux ci-dessous.
D'après vous, quelle est la série de l'artisan et quelle est la série de l'usine ?

SÉRIE 1

Cacao (%)	68	69	70	71	72	73
Effectif	4	14	39	33	8	2

SÉRIE 2

Cacao (%)	68	69	70	71	72	73
Effectif	6	46	54	40	50	4

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Un élève dit que la série 2 correspond à l'usine car elle contient plus de tablettes que la série 1 (200 contre 100). Il émerge que ce raisonnement n'est pas correct car la taille de l'échantillon ne dépend pas du lieu de production mais de l'étude statistique ; par exemple, le contrôleur de qualité avait peut-être davantage de temps le jour où il a étudié la série 2.

Un autre élève propose de s'intéresser au nombre de tablettes à 70 %. Un troisième lui fait remarquer que ce serait plutôt les proportions de tablettes à 70 % qu'il faudrait comparer. Cette proposition est meilleure mais critiquée car elle ne prend pas en compte, par exemple, la différence entre une tablette à 71 % et une autre à 73 %.

Un autre élève propose de calculer les moyennes pour voir laquelle est la plus proche de 70 %. **Travail individuel très bref** pour calculer les moyennes. Cela n'aboutit pas car les moyennes sont très proches.

L'idée de *dispersion* arrive ensuite. Après un court débat autour des procédés de fabrication supposés de l'artisan et de l'usine, on convient de faire l'hypothèse que les dosages de l'usine sont plus précis, et donc que les valeurs de l'usine devraient être moins *dispersées*, plus *homogènes*, moins *hétérogènes*. Un élève dit qu'on voit « à l'œil nu » quelle série est la plus dispersée. Nous montrons alors comment obtenir les diagrammes en bâtons des deux séries à l'aide du fichier Cacao.ods qui contient les deux tableaux de l'énoncé. Les élèves décrivent les diagrammes. L'un d'entre eux dit que la série 2 est plus homogène car les hauteurs de bâtons sont plus homogènes. Un autre invalide cette réponse, puis on arrive à l'idée que les pourcentages sont plus « resserrés » sur le diagramme de la série 1.

Nous disons : « Nous voulons utiliser des *indicateurs de dispersion* pour confirmer cette impression. Vous en avez déjà étudié un au collège. Lequel ? » (**travail individuel très bref**). Un élève propose l'étendue mais il apparaît qu'ici cet indicateur n'apporte pas grand-chose car les étendues des deux séries sont égales à 5. Heureusement, il y a deux nouveaux indicateurs de dispersion au programme de seconde.

On fait l'hypothèse que les dosages de l'usine sont plus précis. Les pourcentages de cacao des tablettes de l'usine devraient alors être moins dispersés, c'est-à-dire plus homogènes ou encore moins hétérogènes. Pour évaluer cela, on va utiliser des indicateurs de dispersion.

Le premier est l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$. Comme tous les indicateurs de dispersion, il fait intervenir une ou plusieurs différence(s). Ce choix peut sembler un peu arbitraire car il n'y a aucune raison de privilégier les 50 % d'observations centrales ; on pourrait également s'intéresser à l'écart interdécile qui mesure la dispersion des 80 % d'observations centrales mais il n'est pas au programme de seconde.

Travail individuel, puis en équipes pour déterminer les deux écarts interquartiles, puis **plénière**. L'écart interquartile de la série 1 est 1, celui de la série 2 est 3, ce qui confirme ce que certains élèves disaient, à savoir que les pourcentages de cacao de la série 2 sont plus dispersés que ceux de la série 1.

Nous disons : « Vous avez à votre programme un autre indicateur de dispersion, l'écart type, qui est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $\sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + \ldots + (x_n - m)^2}{n}}$, pour une série $x_1, \ldots, x_n$ de moyenne m ! Rassurez-vous, la formule est compliquée mais vous n'avez pas à la connaître, seulement à savoir utiliser les fonctions statistiques de votre calculatrice pour calculer l'écart type. Je vais vous montrer comment utiliser votre calculatrice pour déterminer des indicateurs. »

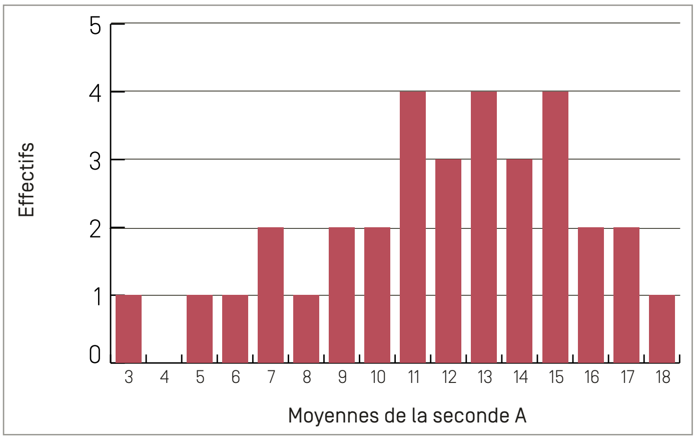
Nous distribuons le résumé Étude d'une série statistique avec la calculatrice (chaque élève reçoit le résumé correspondant au modèle de sa calculatrice).

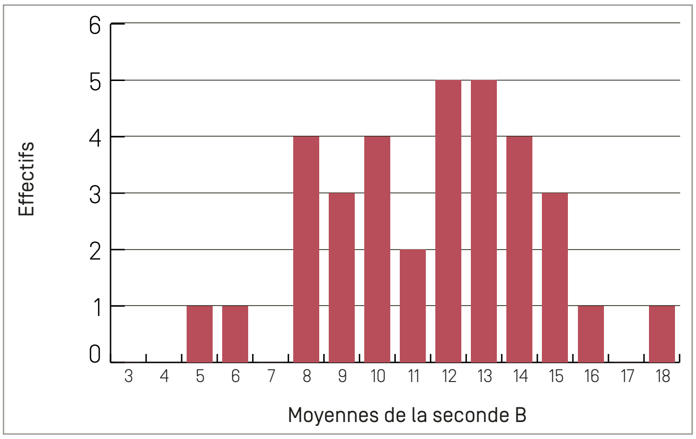
Nous montrons sous la caméra comment utiliser la calculatrice la plus répandue dans la classe pour étudier la série 1, puis la 2. Pendant ce temps, les autres lisent le résumé, puis nous inversons. Nous disons : « Attention, il y a écrit VarFréq ou ListeFréq là où il faut saisir les effectifs ! D'ailleurs, si on saisit les fréquences au lieu des effectifs, cela marche aussi. » L'écart type confirme que les valeurs de la série 2 sont plus dispersées.

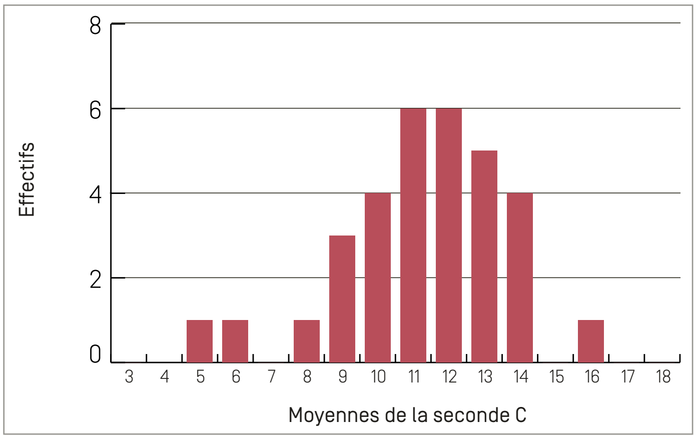
Le bilan est fait à l'aide du bilan S2 nº 3.

EXERCICE DES TROIS CLASSES

Voici trois diagrammes en bâtons récapitulant les moyennes d'EPS des élèves de trois classes de seconde ayant le même professeur.
Quelle est la classe la plus homogène en EPS ?
Quelle est la moins homogène ?







Travail individuel très bref, puis plénière. Des élèves décrivent les diagrammes et proposent les bonnes réponses : C pour la plus homogène, A pour la moins homogène. Nous proposons de confirmer cela en déterminant les indicateurs de dispersion des trois séries à l'aide des fonctions statistiques de la calculatrice.

Les bâtons « les plus resserrés » étant ceux de la seconde C et « les moins resserrés » étant ceux de la seconde A, on peut penser que la seconde la plus homogène est la C et que la moins homogène est la A.

Travail personnel avec entraide pour déterminer les écarts interquartiles et écarts type des trois séries de notes. C'est la première fois que les élèves utilisent les fonctions statistiques de la calculatrice. Nous y passons suffisamment de temps, en montrant notamment aux élèves l'erreur la plus fréquente : ne pas tenir compte des effectifs parce que la calculatrice n'a pas été configurée correctement. Pour éviter cette erreur, il est impératif de bien vérifier à chaque fois que l'effectif global, noté n par la calculatrice, est correct.

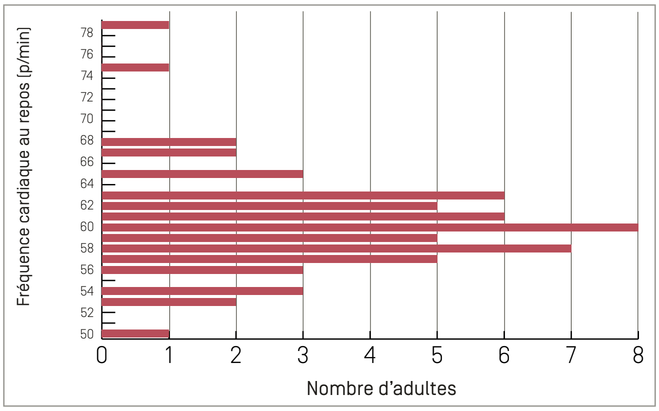
Une fois que tous les élèves parviennent à utiliser leur calculatrice, nous leur demandons de terminer l'exercice en **travail à la maison**.

Plénière. Nous demandons si les calculatrices confirment les impressions visuelles. C'est bien le cas. Nous demandons ensuite quelle classe a la meilleure moyenne (**travail individuel très bref**). Les élèves repèrent sur leur résumé que la calculatrice note $\overline{x}$ la moyenne.

Le bilan est fait à l'aide du bilan S2 nº 4.

EXERCICE DES FCR

1. On a représenté ci-dessous les fréquences cardiaques au repos (FCR) en pulsation par minute (p/min) de 60 adultes entre 20 et 40 ans pratiquant du sport une fois par semaine. Par exemple, 2 adultes ont une FCR de 53 p/min.



Utilisez les fonctions statistiques de votre calculatrice pour compléter les trous ci-dessous.

Indicateurs de position des FCR des 60 sportifs
Moyenne : .... Minimum : .... Q_1 = ... Médiane : .... Q_3 = ... Maximum : ....

Indicateurs de dispersion des FCR des 60 sportifs
Étendue : .... Écart interquartile : .... Écart type : ....

2. L'étude des FCR d'un groupe de 60 personnes du même âge ne pratiquant pas de sport a donné les résultats suivants.
Moyenne : 59,5 Minimum : 49 Q_1 = 60 Médiane : 61 Q_3 = 63 Maximum : 84
Étendue : 35 Écart interquartile : 6 Écart type : 6,6

Peut-on considérer que les FCR de l'un des deux groupes (sportifs ou non sportifs) sont plus élevées que celles de l'autre ?
Peut-on considérer que les FCR d'un des deux groupes sont plus homogènes que celles de l'autre ?
Justifiez vos réponses en utilisant des indicateurs statistiques.

3. Les résultats précédents permettent-ils de savoir si pratiquer du sport une fois par semaine fait baisser ou augmenter la FCR ?

Pour information, les résultats pour la première série :
Moyenne : 60,4 Minimum : 50 Q_1 = 58 Médiane : 60 Q_3 = 62 Maximum = 79
Étendue : 29 Écart interquartile : 4 Écart type : 4,8

Travail à la maison, puis plénière. Question 2. Les valeurs des indicateurs de position ne permettent pas de dire que les FCR de l'un des deux groupes sont plus élevées que celles de l'autre. En revanche, d'après les indicateurs de dispersion, on peut considérer que les FCR des 60 non sportifs sont plus homogènes.

Question 3. Des élèves disent que le sport fait baisser la FCR, sans tenir compte des indicateurs, véhiculant ainsi une idée reçue. D'autres disent qu'au contraire, le sport fait augmenter la FCR car quatre des six indicateurs de position des FCR des sportifs sont supérieurs. À l'issue du débat, nous disons : « Une étude statistique ne permet d'aboutir à des conclusions d'ordre général que si l'effectif de l'échantillon est suffisant, et 60 ne l'est probablement pas. Par exemple, pour réaliser les sondages qui précèdent les élections présidentielles, les statisticiens utilisent des échantillons de taille environ 1 000. D'autre part, contrairement aux idées reçues, la pratique régulière du sport n'a pas tendance à faire baisser la FCR, ou très peu. En revanche, une FCR peu élevée est un avantage pour les sports d'endurance. Par exemple, le grand champion cycliste Eddy Merckx avait une FCR d'environ 40 p/min. »

Par ailleurs, le fait que les FCR des 60 non sportifs soient plus homogènes est probablement une anomalie statistique car il n'y a priori pas de lien entre la pratique du sport et l'hétérogénéité des FCR.

Des élèves sont déconcertés par ces réponses. Nous disons : « Les mathématiques ne peuvent pas tout expliquer ! La réalité est souvent complexe, et les mathématiques atteignent alors parfois leurs limites. »

1. *Les élèves corrigent leurs résultats si besoin.*
2 et 3. *Le bilan est fait à l'aide du bilan S2 n° 5.*

EXERCICE DES DEUX ENTREPRISES

1. Voici deux tableaux concernant les salaires d'une entreprise A. Complétez le second tableau.

SALAIRE MENSUEL NET	1 200 €	1 250 €	1 300 €	1 600 €	2 100 €	3 600 €	10 000 €
NOMBRE D'EMPLOYÉS	28	25	23	17	8	3	1

ÉTENDUE	MOYENNE	ÉCART TYPE	1er QUARTILE	MÉDIANE	3e QUARTILE	ÉCART INTER QUARTILE

2. Voici un tableau concernant les salaires d'une entreprise B.

ÉTENDUE	MOYENNE	ÉCART TYPE	1ER QUARTILE	MÉDIANE	3E QUARTILE	ÉCART INTER QUARTILE
2 950 €	1 640 €	660 €	1 450 €	1 550 €	1 800 €	350 €

Peut-on dire qu'une des deux entreprises paie mieux ses salariés que l'autre ?
Justifiez votre réponse à l'aide d'indicateurs statistiques.

3. Peut-on dire que les salaires d'une des deux entreprises sont plus homogènes que les salaires de l'autre ?
Justifiez votre réponse à l'aide d'indicateurs statistiques.

L'énoncé est collé sur une copie. **Travail à la maison** à rendre.

Plénière. Quelques productions intéressantes sont projetées et discutées. Puis les copies corrigées sont rendues.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Calculs d'indicateurs de dispersion.

EXERCICE DE LA POPULATION FRANÇAISE

Consignes générales

Sur le site de l'Insee (insee.fr), faites une recherche en saisissant « Population totale par sexe et âge ».
Sélectionnez « Population totale par sexe et âge au 1er janvier 2019, France » puis téléchargez le fichier correspondant (bouton jaune).
Vous utiliserez ce fichier nommé « pop-totale-france.xls » pour répondre aux questions suivantes.
Renommez ce fichier en ajoutant votre nom et prénom : « pop-totale-france-NOM-prénom.xls » (ou .ods ou .xlsx).
Le devoir se fait entièrement sur ce fichier. Attention : en dehors des quatre opérations, seule la commande SOMME du tableur est autorisée. De plus, la calculatrice n'est pas autorisée.
Une fois le devoir terminé, envoyez-moi le fichier via l'ENT, par courriel à l'adresse ... ou via une clé USB.
Attention : vous devez envoyer un fichier .xls ou .ods ou .xlsx. Les autres formats ne sont pas acceptés.
Enfin, je dois pouvoir comprendre comment vous avez utilisé le tableur pour répondre aux questions.

Aides pour utiliser le tableur

Pour créer une nouvelle feuille dans un fichier .xls ou .ods, cliquez sur le petit « + » en bas à gauche.
Quand on met un « $ » devant une lettre ou un nombre d'une formule qu'on recopie vers la droite ou vers le bas, la lettre ou le nombre en question n'est pas modifié.
Pour insérer un diagramme correspondant à une plage de données :
– sélectionnez la plage de données ;
– faites « Insertion/Diagramme » ;
– sélectionnez le type de diagramme, les options, les titres, etc.

Questions

1. Sur la feuille 1 du fichier téléchargé, calculez le pourcentage d'hommes dans la population et le pourcentage de femmes.

2. Créez une nouvelle feuille appelée « Âge moyen ».
Recopiez, dans cette nouvelle feuille, les données des colonnes B et E de la feuille 1.
En effectuant des manipulations sur cette nouvelle feuille, calculez l'âge moyen de la population.

3. Créez une nouvelle feuille appelée « Fréquences et quartiles ».
Recopiez dans cette nouvelle feuille les données des colonnes B et E de la feuille 1.
Dans une nouvelle colonne de cette feuille, faites figurer les fréquences de chacune des classes d'âge de la population.
Question facultative (plus difficile) : en utilisant les fréquences précédentes, déterminez les trois quartiles de la série des âges de la population française.

4. Sur la feuille 1, insérez un diagramme en bâtons récapitulant les âges des femmes et les âges des hommes. Attention : vous devez faire un seul diagramme, pas deux.
Rédigez un court texte dans lequel vous comparerez les âges des femmes et les âges des hommes (inspirez-vous du diagramme).

Nous montrons au vidéoprojecteur :
– comment faire une recherche sur le site de l'Insee ;
– comment créer une nouvelle feuille dans un fichier .xls ou .ods ;
– comment insérer un diagramme.

Travail à la maison pour J + 2 : télécharger le fichier de l'Insee, le renommer et créer une nouvelle feuille intitulée « Âge moyen ».

Plénière à J + 2. Les élèves font part des éventuelles difficultés rencontrées.

Travail à la maison pour J + 7 : finir le travail. Les élèves ont pour consigne de poser des questions via l'ENT ou pendant les cours en cas de problème d'utilisation du tableur. À chaque cours, nous demandons si quelqu'un veut une explication concernant le tableur et y passons quelques minutes si besoin.

Une fois les productions récupérées, nous les annotons en écrivant directement dans les fichiers des élèves en rouge et leur faisons parvenir ces fichiers annotés accompagnés de notre solution personnelle.

Plénière. Nous faisons un bilan en projetant quelques productions intéressantes.

ÉTAPE 3

Effet sur les indicateurs d'une modification affine des données

Phase de prise en main des indicateurs déjà étudiés |
Phase d'élaboration de la linéarité de la moyenne | ⏱ 45 minutes

EXERCICE DU GENTIL PROFESSEUR

Après avoir corrigé une évaluation, un professeur de mathématiques détermine les différents indicateurs de la série des notes (voir Série 1 dans le tableau ci-dessous). La meilleure note est 16 mais il trouve les notes trop basses et trop homogènes. Il souhaite modifier les notes mais il hésite entre ajouter 2 points à toutes les notes et multiplier toutes les notes par 1,2.

1. Remplissez le tableau ci-dessous, puis aidez le professeur à faire son choix.

	MOYENNE	MÉDIANE	ÉTENDUE	ÉCART INTERQUARTILE
Série 1. Notes de départ	10,5	10,1	12	6
Série 2. Notes après ajout de 2 points				
Série 3. Notes après multiplication par 1,2				

2. (Question pour les rapides) Que pensez-vous d'une troisième option : multiplier toutes les notes par 1,1 puis ajouter 1 point ?

Travail individuel en commençant par les étendues, entrecoupé par une **plénière de régulation** où il émerge que comme l'étendue de la série 1 est 12, la note la plus basse est 4, ce qui facilite le calcul des étendues des séries 2 et 3.

Travail en équipes, puis plénière. Une fois calculées les deux étendues, nous passons au problème de la moyenne de la série 2. Des élèves pensent qu'elle augmente de 2 mais il faut une justification. Nous disons alors : « Quand on a un problème avec beaucoup de nombres, on peut essayer de considérer d'abord un problème similaire avec moins de nombres pour voir ce qui se passe. Ici, imaginez que la classe ne comporte que deux élèves et que les notes de départ soient 10 et 11 : est-il exact que la moyenne augmente de 2 si chaque note augmente de 2 ? Et qu'en est-il si chaque note est multipliée par 1,2 ? » (**travail individuel très bref**). Une fois constaté que pour cette série de deux notes, la moyenne augmente de 2 (respectivement est multipliée par 1,2), il est admis que ces résultats restent valables pour n'importe quelle série de notes.

Puis nous passons aux quartiles des séries 2 et 3. Une fois que le bon raisonnement a émergé, nous l'illustrons à l'aide de Gentil_professeur.ggb en faisant varier les curseurs Ajout et Coefficient.

En fin de plénière, les propriétés de linéarité de la moyenne sont institutionnalisées (voir résumé Séries statistiques).

Si chaque note augmente de 2, alors la moyenne augmente de 2.
Si chaque note est multipliée par 1,2, alors la moyenne est multipliée par 1,2.
C'est en multipliant les notes par 1,2 que les quatre indicateurs seront les plus grands, donc que les notes seront les plus hautes et les plus hétérogènes.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Séries statistiques.

EXERCICE DE LA RENTRÉE

1. Au cours de la semaine de la rentrée de septembre, le nombre d'élèves d'un lycée varie chaque jour. Calculez *mentalement* le nombre moyen d'élèves au cours de la semaine.

	LUNDI	MARDI	MERCREDI	JEUDI	VENDREDI
Nombre d'élèves	680	681	686	685	688

2. (Question pour les rapides) Inventez une série de nombres positifs de moyenne 25 et de médiane 1.

Nous ne donnons pas cet exercice le même jour que le précédent.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Le calcul mental de la somme des cinq nombres puis du quotient du résultat par 5 est difficile. Un élève propose ensuite de calculer la moyenne de la série 0, 1, 6, 5, 8, puis d'ajouter 680 à cette moyenne. La méthode est discutée puis justifiée à l'aide de la linéarité de la moyenne. Enfin, nous entraînons les élèves sur une ou deux séries du même type.

$0 + 1 + 6 + 5 + 8 = 20$ et $20 \div 5 = 4$. Donc la moyenne de la série 0, 1, 6, 5, 8 est 4.
Quand on ajoute 680 aux nombres de la série précédente, la moyenne augmente de 680.
Donc le nombre moyen d'élèves du lycée est 684.

SÉQUENCE 3

Probabilités (1re partie) (P1)

Au cycle 4, les élèves ont appréhendé le hasard à travers des expériences concrètes, le vocabulaire de base a été utilisé et le lien entre les probabilités de deux événements contraires a été fait. Les calculs de probabilités concernaient des situations simples, mais ne relevant pas nécessairement d'un modèle d'équiprobabilité. Le constat de la stabilisation des fréquences s'appuyait sur des simulations.

PROGRAMME 2019

Probabilités

En classe de seconde, on formalise la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité (par exemple : lancer de pièces ou de dés équilibrés, tirage au hasard dans une population) qu'il est recommandable d'expliciter ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel (par exemple : lancer de punaise, sexe d'un enfant à la naissance). Dans tous les cas, on distingue nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle.

- Ensemble (univers) des issues. Événements.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.

L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, [...] puis les travaux [...] de Huygens qui en découlent.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Notre approche s'inspire des travaux de Bernard Parzysz[3]. Nous commençons par les modèles fréquentistes pour lutter tout de suite contre le biais d'équiprobabilité et parce que c'est très concret, puis nous passons aux modèles théoriques d'équiprobabilité.

- **Étape 1**: Modèle fréquentiste associé à une répétition de réalisations effectives d'une expérience aléatoire à trois issues. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues.
- **Étape 2**: Interprétation ensembliste d'un événement, notation des ensembles finis, notation de la probabilité d'un événement.
- **Étape 3**: Modèles d'équiprobabilité. Simulation d'expériences aléatoires à l'aide d'un tableur.
- **Étape 4**: Exercices de synthèse.

ÉTAPE 1

Modèle probabiliste à partir de fréquences observées

Phase de prise en main de notions du collège | ⏱ 3 heures

Attention, pour cette étape, nous nous procurons des briques de Lego 3003, au moins une par équipe, si possible une par élève.

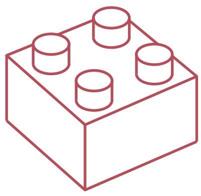
EXERCICE (PROJETÉ)

Lors d'un entraînement de tir, un premier policier atteint la cible 47 fois sur 52 tirs. Un second policier tire 68 fois et atteint la cible 58 fois.
Quel policier est le plus adroit ?

Nous donnons cet exercice quelques jours avant celui du jeu de Ségo. **Travail individuel très bref, puis plénière.** Nous employons le mot « fréquence » le plus possible.

EXERCICE DU JEU DE SÉGO

Votre copine Ségo vous propose un jeu : « Place ce Lego à environ 30 cm au-dessus du sol et lâche-le :
– s'il tombe sur un des quatre côtés, je te donne 5 € ;
– s'il tombe sur les tenons, tu me donnes 3 € ;
– s'il tombe sur la base, je ne te donne rien et tu ne me donnes rien. »
Avez-vous intérêt à jouer au jeu de Ségo ?



Pour information, la probabilité que cette brique tombe sur le côté est d'environ 20 %, environ 50 % pour les tenons et 30 % pour la base. Nous avons choisi ces briques car elles remplissent les conditions suivantes :

- elles sont toutes identiques à la précision du procédé de fabrication près ;
- lorsqu'on en lance une en l'air, on peut considérer trois issues ;
- sur une vingtaine de lancers, on a de très fortes chances d'observer au moins une fois chacune de ces trois issues ;
- les trois issues sont assez loin d'être équiprobables ;
- elles sont suffisamment petites pour qu'on ne puisse pas prédire l'issue lorsqu'on en lance une ;
- elles sont suffisamment asymétriques pour que les probabilités des issues ne puissent être obtenues par des considérations de symétries ;
- lorsqu'elles retombent, elles ne s'abîment ni ne se déforment.

Chacun reçoit une brique Lego 3003 avec l'énoncé. Pour clarifier l'énoncé, nous expliquons, à l'aide de la caméra, ce que sont les côtés, les tenons et la base.

3 Voir par exemple : http://turing.scedu.umontreal.ca/annales/documents/volume%2016/Parzysz.pdf

Travail individuel, puis plénière de régulation. Nous donnons d'abord la parole à des élèves qui proposent de mauvais arguments, comme ceux ci-dessous.

MAUVAIS ARGUMENT	RÉFUTATION
On peut gagner plus qu'on ne perd, donc on a intérêt à jouer.	Avec cet argument, on aurait intérêt à jouer au Loto. Or ce n'est pas le cas car l'État organise des jeux pour gagner de l'argent. La probabilité de gagner au Loto est très petite alors que celle de perdre est très grande. Si les gens jouent quand même, c'est pour rêver !
On peut perdre, donc on n'a pas intérêt à jouer.	Nous proposons un jeu à l'élève qui donne cet argument : « Je cache un Lego bleu dans une de mes mains et un rouge dans l'autre. Tu choisis une main au hasard : si c'est le bleu, je te donne 10 € ; si c'est le rouge, tu me donnes un centime. Est-ce que tu joues ? »
On a autant de chance de gagner que de perdre (1 chance sur 3). Et comme on a plus à gagner qu'à perdre, on a intérêt à jouer.	Nous montrons un tube de colle classique à Andréa, l'élève qui a donné cet argument, et lui disons : « Je te propose un jeu. Lance ce tube de colle : s'il tombe couché, tu me donnes 1 € ; s'il tombe debout avec le bouchon en l'air, je te donne 2 € ; s'il tombe debout avec le bouchon en bas, tu ne gagnes rien et tu ne perds rien. Est-ce que tu joues ? »… Nous mettons en garde contre l'erreur classique qui consiste à croire que les issues sont forcément équiprobables : ici, on n'a pas de raison de penser que c'est le cas.
On a 4 chances sur 6 de gagner et 1 chance sur 6 de perdre, et comme on a plus à gagner qu'à perdre, on a vraiment intérêt à jouer !	C'est une autre version de l'erreur d'Andréa ! L'argument est réfuté de la même manière que le précédent. La différence avec un dé classique équilibré est discutée.

D'autres arguments sont donnés : Lisa pense qu'il ne faut pas jouer car d'après les essais qu'elle a faits, la brique tombe peu sur les côtés ; Nadir dit que les probabilités dépendent de la forme du Lego ; d'après Gaspard, pour trouver les probabilités, il faut lancer la brique plusieurs fois… Sans trop en dire, nous validons l'opinion de Nadir et annonçons que nous allons suivre la proposition de Gaspard.

Sandra avait proposé de lancer plusieurs fois la brique et de calculer le gain total après toutes les parties correspondantes. Nous disons que cette idée est intéressante, que nous y reviendrons plus tard et que nous allons d'abord suivre l'idée de Gaspard. La méthode de Sandra est liée à la notion d'espérance de gain, notion plus simple que celle de probabilité. Historiquement, la notion d'espérance de gain est apparue avant celle de probabilité : le concept de « mesure des chances de se produire » est assez abstrait et n'a été introduit par Christian Huygens qu'après les travaux de Blaise Pascal et Pierre de Fermat sur le problème du chevalier de Méré. Mais comme la notion d'espérance de gain n'est pas au programme, la méthode qui consiste à déterminer des probabilités est privilégiée.

Avant de poursuivre, quelques préconisations sont rappelées. Quand on étudie une expérience aléatoire, on doit commencer par faire la liste des issues. Ici, nous écartons le modèle à six issues (une par face) et considérons que les quatre côtés correspondent à la même issue. Les trois issues sont notées b comme base, c comme côtés et t comme tenons. Par convention, les issues sont notées en minuscules et les événements en majuscules.

Ensuite, nous rappelons ce qu'est une expérience aléatoire, un événement, une probabilité, un événement impossible, un événement certain, puis échangeons sur l'intérêt des probabilités dans la vie quotidienne. Nous concluons ainsi : « La communauté mathématique a inventé la théorie des probabilités pour étudier le hasard scientifiquement. Cette théorie aide à prendre certaines décisions : faut-il opérer tel malade ? A-t-on intérêt à jouer à tel jeu de hasard ? Comment fixer le montant de telle assurance ? ».

Les élèves écrivent le titre de la séquence.

Plusieurs élèves ont dit que la probabilité de gagner 5 € était de $\frac{1}{3}$ et que la probabilité de perdre 3 € valait $\frac{1}{3}$ aussi. Attention, on n'en sait rien ! Les trois issues ne sont pas forcément équiprobables.

Le bilan est fait à l'aide du bilan P1 nº 1. Il contient un rappel sur les notions d'issue, d'événement, de probabilité, ainsi que l'ébauche d'un modèle probabiliste du lancer du Lego dans lequel on choisit trois issues notées b, c, t et qui se termine par la phrase « Il faut maintenant choisir les probabilités des issues b, c et t, que l'on note p, q et r. »

EXERCICE (AU TABLEAU)

Proposez des valeurs pour les probabilités p, q et r en justifiant vos choix.

Travail individuel, puis en équipes pour rendre une production commune, **puis plénière**. Si certaines équipes partent encore de considérations d'équiprobabilités, nous projetons leurs productions au début. Ensuite, nous projetons les productions où des probabilités sont déduites des fréquences observées (les dernières productions ne sont projetées que quelques secondes). Nous insistons sur la distinction entre « fréquence observée par le groupe » et « probabilité proposée par le groupe ». Des discussions portent sur la somme des trois fréquences proposées : il serait mieux qu'elle vaille 1.

Certaines équipes ont obtenu des fréquences différentes. Nous disons que nous avons déjà observé ce phénomène de fluctuation de fréquences et y reviendrons en fin d'année.

Les élèves se demandent quelles sont les *valeurs exactes* de p, q et r et sont un peu désemparés. Nous répondons : « Il n'y a pas de valeurs exactes. C'est à nous de choisir des valeurs les plus fiables possibles, ce qui permettra ensuite de prendre une bonne décision concernant le jeu de Ségo. »

Si des élèves disent que les variations de dimension d'une brique à l'autre entraînent des différences au niveau des probabilités, nous leur répondons : « En théorie, on pourrait choisir des probabilités différentes d'une brique à l'autre. Mais les écarts de dimensions de deux briques étant infimes, on peut choisir les mêmes probabilités p, q et r pour toutes les briques. »

Nous validons le fait de prendre comme probabilité une valeur approchée au centième d'une fréquence observée car vu les variations qu'il y a d'un groupe à l'autre, les chiffres suivants ne sont certainement pas significatifs. Cependant, nous ne confirmons pas encore le fait que le nombre de lancers doit être suffisant. En particulier si des élèves proposent de regrouper les résultats des différents groupes, nous ne nous prononçons pas.

Nous projetons un portrait de Jacques Bernoulli, puis des extraits de son *Ars Conjectandi* publié en 1713 (diapositives 1 à 4 du diaporama) et mettons en avant leur aspect précurseur.

Nous concluons ainsi : « Les propositions que vous avez faites à partir des calculs de fréquences sont déjà bien meilleures que les trois tiers proposés par certains, mais ce n'est pas encore très satisfaisant à cause des fluctuations de fréquences. Je vous donnerai au prochain cours un document regroupant les résultats des différents groupes. »

Sur 20 lancers, le 1er groupe a obtenu 5 b, 6 c et 9 t. Comme valeurs pour les probabilités p, q et r, on pourrait choisir les fréquences $f_b = \frac{5}{20} = 25\ \%$, $f_c = \frac{6}{20} = 30\ \%$ et $f_t = \frac{9}{20} = 45\ \%$ mais ce n'est pas très satisfaisant car d'autres groupes obtiennent des résultats assez différents.

Après la séance, nous fabriquons un énoncé tel que celui page suivante.

EXERCICE DU JEU DE SÉGO (SUITE)

Voici les résultats des lancers de briques des différents groupes. Les fréquences de chaque groupe ont été arrondies au centième de telle sorte que la somme des trois fréquences vaille 1.

GROUPES	GPE 1	GPE 2	GPE 3	GPE 4	GPE 5	GPE 6	GPE 7	GPE 8
Nombre total de lancers	20	10	10	44	40	60	104	50
Nombre de b	5	1	2	12	10	17	30	16
Nombre de c	6	3	2	13	11	12	23	9
Nombre de t	9	6	6	19	19	31	51	25
Fréquence de b	0,25	0,10	0,20	0,27	0,25	0,28	0,29	0,32
Fréquence de c	0,30	0,30	0,20	0,30	0,27	0,20	0,22	0,18
Fréquence de t	0,45	0,60	0,60	0,43	0,48	0,52	0,49	0,50

Proposez, pour les probabilités p, q et r, de meilleures valeurs que les fréquences ci-dessus.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Des élèves font des moyennes de nombres de lancers ou de fréquences. Cette méthode est rejetée car le nombre total de lancers est différent d'un groupe à l'autre. Il apparaît que le mieux que l'on puisse faire est de prendre pour probabilité d'une issue la fréquence observée sur le plus grand nombre de lancers possible. Nous confirmons : « Le grand nombre de lancers atténue les effets du hasard. Par exemple, il arrive qu'on n'obtienne que des piles si on lance une pièce 2 fois, mais pas si on la lance 1000 fois. Si on la lance 1000 fois, on aura très probablement entre 400 et 600 piles ». On décide donc de regrouper les résultats des différents groupes.

Les fréquences observées sont alors $\frac{93}{338}$, $\frac{79}{338}$ et $\frac{166}{338}$. Et comme on a plus l'habitude des pourcentages que des « pour-trois-cent-trente-huitages », on choisit finalement $p = 0{,}28$, $q = 0{,}23$ et $r = 0{,}49$ dont la somme vaut bien 1.

Ars Conjectandi présente cette même idée. Nous projetons un nouvel extrait (diapositives 5 et 6).

En fin de plénière, en guise de première utilisation, nous donnons l'exercice suivant (**travail individuel très bref**) : « Chez moi, j'ai lancé 10 fois 10 briques et j'ai obtenu 33 b, 15 c et 52 t. Proposez maintenant de meilleures valeurs pour les probabilités p, q et r. » Les élèves regroupent les 338 lancers de la classe et les 100 autres…

En regroupant les 338 lancers de la classe, on trouve : 93 b, 79 c et 166 t.

On pourrait choisir $p = \frac{93}{338}$ mais on préfère un pourcentage.

Si on prenait $p = 0{,}275147929$, les derniers chiffres n'auraient pas d'intérêt.

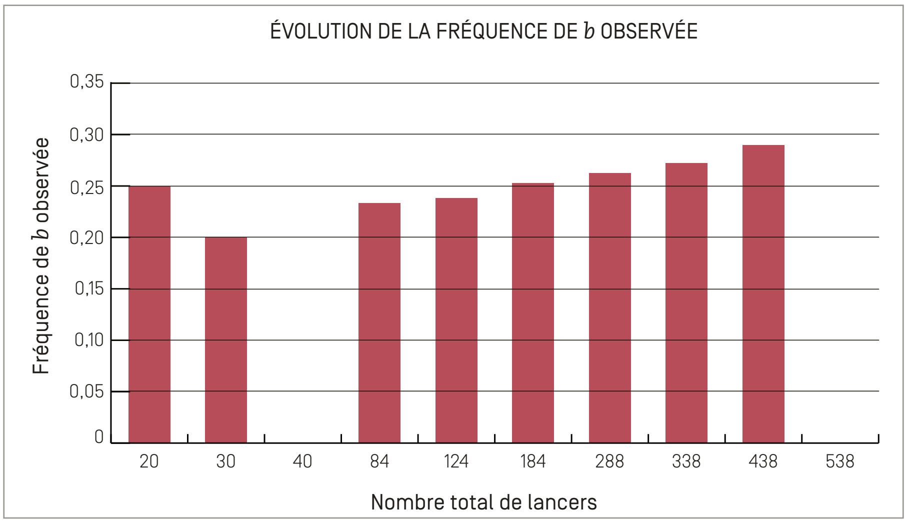
On choisit alors $p = 0{,}28 = 28\%$, puis $q = 0{,}23 = 23\%$ et $r = 0{,}49 = 49\%$ (la somme vaut bien 1).

EXERCICE DE L'ÉVOLUTION DES FRÉQUENCES OBSERVÉES

Votre professeur a lancé 100 fois un Lego (résultat : 33 *b*, 15 *c* et 52 *t*), puis encore 100 fois (résultat : 28 *b*, 20 *c* et 52 *t*).
On considère que ces deux séries correspondent aux groupes fictifs 9 et 10.
On a regroupé progressivement les résultats des groupes 1 à 10 dans le tableau suivant.

GROUPES	1	1 ET 2	1 À 3	1 À 4	1 À 5	1 À 6	1 À 7	1 À 8	1 À 9	1 À 10
Nombre total de lancers	20	30	40	84	124	184	288	388	438	538
Nombre de *b*	5	6	8	20	30	47	77	93	126	154

Puis on a représenté sur un diagramme en bâtons l'évolution des fréquences de *b* observés.
1. Le troisième et le dernier bâtons sont manquants. Dessinez-les.
2. Que constatez-vous concernant l'évolution de la fréquence de *b* ?



Les élèves lisent l'énoncé. Quelques-uns proposent une phrase d'explication de la signification du premier bâton, puis du deuxième bâton. Nous expliquons que cet exercice a pour but de montrer un exemple d'évolution de la fréquence en fonction du nombre de lancers.

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Les calculs de la question 1 sont exposés puis, à l'aide d'une feuille de calcul dans laquelle les effectifs ont été regroupés au préalable, nous fabriquons devant les élèves le graphique complet : d'abord le calcul des fréquences à l'aide d'une formule, puis la création du diagramme… Pour la question 2, les élèves s'expriment à propos de l'évolution de la fréquence observée et évoquent la loi des grands nombres.

Les élèves complètent le diagramme.

1. Pour dessiner le 3ᵉ bâton, on a calculé la fréquence de *b* sur les 40 premiers lancers : $\frac{8}{40} = 0,2$.

2. La fréquence de *b* observée semble se stabiliser vers 29 % au fur et à mesure que le nombre de lancers augmente. Ce phénomène s'appelle la loi des grands nombres.

EXERCICE DU JEU DE SÉGO (SUITE ET FIN)

Quand vous faites une partie du jeu de Ségo, vous avez donc environ :
– 21 % de chances de gagner 5 € ;
– 50 % de chances de perdre 3 € ;
– 29 % de chances de ne rien gagner ni perdre.
Donc sur 100 parties, vous gagnez en moyenne 21 fois 5 € et vous perdez en moyenne 50 fois 3 €.
Avez-vous intérêt à jouer ?

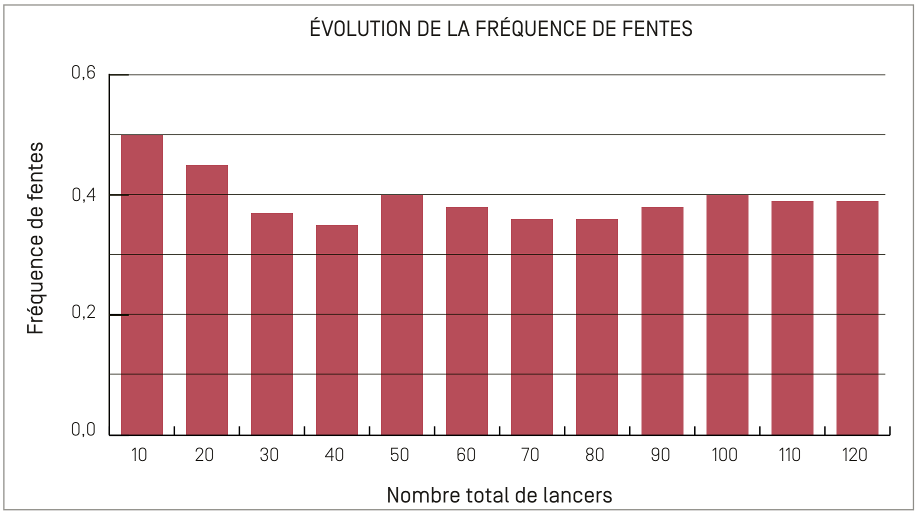
Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Cet exercice ne pose pas de réel problème. En fin de plénière, si des élèves ont proposé au tout début de faire des parties du jeu de Ségo puis de calculer le gain total, cette deuxième méthode est comparée à la première : elle est plus simple car elle ne fait pas intervenir la notion de probabilité.

Historiquement, le calcul de l'espérance de gain est antérieur à celui de probabilité. Nous projetons un extrait d'une lettre (diapositive 7) où Pascal expose à Fermat le début de son calcul d'espérance de gain dans le problème des partis[4]. Nous exposons ce problème dans le cas choisi par Pascal (mise totale de 64 pistoles, jeu en trois parties, un joueur a déjà gagné deux parties et l'autre une) sans dévoiler la solution. Suite aux travaux de Pascal et Fermat sur ce problème, Christian Huygens publie en 1657 le livre *Sur le calcul dans les jeux de hasard*. Il introduit l'expression « valeur de l'espérance » peu après, ce qui influencera *Ars Conjectandi*. En effet, sur la première page de l'exemplaire d'*Ars Conjectandi*, on voit une allusion à *De ratiociniis in ludo aleæ* (*Sur le calcul dans les jeux de hasard*) de Huygens qui, par ailleurs, est également l'auteur de la préface. Les apports scientifiques de Huygens sont innombrables, il est en particulier considéré comme le précurseur du moteur à combustion interne.

$21 \times 5\ € + 50 \times (-3\ €) = -45\ €$
Sur 100 parties, on perd en moyenne 45 €. Donc du point de vue financier, on n'a pas intérêt à jouer.

EXERCICE DU CAURI

Un cauri est un coquillage qui peut retomber de deux manières lorsqu'on le lance : sur le dos ou sur la fente.
Pour étudier l'expérience aléatoire du lancer de cauri, on lance 120 fois un cauri ; tous les 10 lancers, on calcule la fréquence de l'événement « le cauri tombe sur la fente ». On obtient le diagramme en bâtons ci-dessous.
1. Parmi les 10 premiers lancers, combien a-t-on obtenu de fentes ?
2. Parmi les 50 premiers lancers, combien a-t-on obtenu de fentes ?
3. Choisissez des « bonnes valeurs » pour les probabilités de chacune des deux issues. Justifiez les choix.



Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

Les calculs précédés de la mention « [Sans rédiger] ».

4 Voir Gilles Aldon, « Pascal, Fermat et le problème des partis », *TDC*, n° 1098, 15 juin 2015.

EXERCICE DES ÉVÉNEMENTS

On revient au lancer du Lego. Complétez le tableau ci-après en indiquant, pour chacun des événements, le nombre de fois où il a été réalisé lors des 538 lancers, la fréquence de l'événement et sa probabilité.

ÉVÉNEMENT	NOMBRE DE RÉALISATIONS	FRÉQUENCE OBSERVÉE	PROBABILITÉ
La brique tombe sur la base.	154	$\frac{154}{538}$	0,29 ou 29 %
La brique tombe sur un côté.	114	$\frac{114}{538}$	0,21 ou 21 %
La brique tombe sur les tenons.	270	$\frac{270}{538}$	0,5 ou 50 %
La brique tombe sur la base ou sur un côté.			
La brique tombe sur la base et sur un côté.			
La brique ne tombe pas sur un côté.			
La brique tombe sur la base ou un côté ou les tenons.			

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Lorsque les élèves utilisent en acte les propriétés du bilan P1 n° 2 ci-dessous, nous les énonçons. La notion d'*événement contraire* est redéfinie. Les expressions *événement certain* et *événement impossible* sont utilisées.

Nous profitons de cet exercice pour préciser les sens du *ou* et du *et* en mathématiques. Quand nous estimerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé correspondant, c'est-à-dire la partie V du résumé Logique, qui se colle après les parties I à IV distribuées dans la séquence G1.

On pourrait considérer que la méthode de Salim ci-dessous n'est pas tout à fait correcte dans la mesure où elle ne donne pas forcément $p + q$. Mais nous pensons qu'il faut l'accepter tout de même car avec l'approche fréquentiste, comme en géométrie dessinée, plusieurs résultats sont possibles.

Le bilan est fait à l'aide du bilan P1 n° 2 ci-dessous.

Deux méthodes pour déterminer la probabilité de « *b* ou *c* »

Salim : $\frac{154+114}{538} = \frac{268}{538} \simeq 0{,}50$ Hélène : $p + q = 0{,}29 + 0{,}21 = 0{,}50$

Trois méthodes pour déterminer la probabilité du « contraire de *c* »

Maëlle : $\frac{538-114}{538} = \frac{424}{538} \simeq 0{,}79$ Georges-Henry : $p + q = 0{,}29 + 0{,}50 = 0{,}79$

Amir : 100 % – q = 100 % – 21 % = 79 %

Propriété

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

Définition et notation

L'événement contraire d'un événement A est l'événement réalisé lorsque A n'est pas réalisé. Il est noté $\overline{A}$.

Propriété

La probabilité de $\overline{A}$ est la différence entre 1 et la probabilité de A.

ÉTAPE 2

Événements et ensembles

Phase d'élaboration | 50 minutes

Nous commençons : « Jusque-là, pour écrire des résultats sur les probabilités, nous avons souvent dû faire de grandes phrases, par exemple “La probabilité que la brique tombe sur la base ou un côté est égale à la somme de la probabilité que la brique tombe sur la base et de la probabilité que la brique tombe sur un côté”. Décrire un événement par une phrase est souvent long et les mathématiciennes et mathématiciens préfèrent décrire un événement par l'ensemble des issues qui font que l'événement est réalisé. Par exemple, pour un lancer de dé classique, l'événement “obtenir un nombre pair” est représenté par l'ensemble dont les éléments sont 2, 4 et 6 et qui est noté $\{2 ; 4 ; 6\}$ ou bien $\{4 ; 2 ; 6\}$, etc. L'événement “obtenir un 1” est représenté par l'ensemble dont le seul élément est 1 et qui est noté $\{1\}$. Ces deux ensembles sont encore appelés abusivement *événement*, bien qu'un événement d'une expérience aléatoire et un ensemble soient a priori de natures très différentes. Ces “ensembles-événements” permettent d'éviter les phrases trop longues. Par exemple, “la probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à 0,5” s'écrit $P(\{2 ; 4 ; 6\}) = 0{,}5$. Faites bien attention aux parenthèses et aux accolades ! » Nous introduisons enfin la notion d'univers et sa notation.

Le bilan P1 nº 3 est fait à l'aide du texte ci-dessous, distribué sur le même document que l'exercice des événements (suite) qui suit.

Événements et ensembles

Les mathématiciennes et mathématiciens associent à un événement d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues qui font que l'événement est réalisé. Cet ensemble est encore appelé abusivement « événement ». Voici des exemples.

- Pour un lancer de dé classique, l'événement « obtenir un nombre pair » est représenté par l'ensemble dont les éléments sont 2, 4 et 6 et qui est noté $\{2 ; 4 ; 6\}$ ou bien $\{4 ; 6 ; 2\}$, etc.
- Pour le lancer de Lego, l'événement « la brique tombe sur la base » est constitué de la seule issue b. L'ensemble associé est $\{b\}$. À l'événement « la brique tombe sur la base ou sur un côté » on associe l'ensemble $\{b ; c\}$.
- Pour une expérience aléatoire quelconque, à un événement certain on associe l'ensemble de toutes les issues.

Cet ensemble est appelé univers et est noté Ω. Pour le Lego, on a : $\Omega = \{b ; c ; f\}$.
La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.
La propriété sur la probabilité d'un événement contraire s'écrit donc : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

EXERCICE DES ÉVÉNEMENTS (SUITE)

Faites la liste de tous les événements possibles du lancer de brique et de leur probabilité (donnez les résultats sous forme d'ensembles et avec la notation $P(...)$ ci-dessus).

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Il est rappelé que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le constituent. Nous introduisons rapidement la notion de *sous-ensemble* (elle sera étudiée dans la séquence « Ensembles », non traitée dans cet ouvrage, voir tableau de progression p. 22).

Les réponses sont notées à la main (par exemple $P(\{b ; c\}) = p + q = 0{,}29 + 0{,}21 = 0{,}5$).

Propriété

Pour n'importe quelle expérience aléatoire, on a :
$P(\varnothing) = 0$ (la probabilité de l'événement impossible est 0) ;
$P(\Omega) = 1$ (la probabilité de l'événement certain est 1).

EXERCICE DE L'URNE MYSTÈRE

Une urne opaque contient des boules rouges, bleues, vertes et jaunes, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne. On réalise l'expérience 1 000 fois, en remettant la boule tirée dans l'urne après chaque tirage, puis on continue jusqu'à 5 000 tirages, et jusqu'à 10 000 tirages. Voici les résultats.

	1 000 TIRAGES	5 000 TIRAGES	10 000 TIRAGES
Nombre de boules rouges tirées	163	760	1 508
Nombre de boules bleues tirées	244	1 249	2 476
Nombre de boules vertes tirées	292	1 502	2 982
Nombre de boules jaunes tirées	301	1 489	3 034

On choisit un modèle à quatre issues notées r, b, v, j (notations naturelles).

1. Proposez une « bonne valeur » pour les probabilités $P(\{r\})$, $P(\{b\})$, $P(\{v\})$ et $P(\{j\})$ des quatre issues.

2. Avec le modèle choisi à la question 1, quelles sont les valeurs de $P(\{r ; j\})$, $P(\overline{\{b\}})$ et $P(\overline{\{b ; v\}})$?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Question 1. Les élèves débattent du choix des probabilités des issues : faut-il ajouter les trois résultats d'une même ligne ou bien garder seulement les résultats de la colonne de droite ? Et comment arrondir ?
Question 2. Plusieurs méthodes sont possibles pour les deux dernières. Si des élèves font un lien entre événement contraire et « ensemble des autres issues », nous validons sans développer car la notion de complémentaire d'un sous-ensemble sera vue dans la séquence « Ensembles ».

Le bilan est fait à partir du bilan P1 nº 4.

ÉTAPE 3

Modèle d'équiprobabilité, simulation avec un tableur

Phase de prise en main de la notion d'équiprobabilité, des simulations avec tableur et de l'interprétation ensembliste des événements | ⏱ 2 h 15

MODÈLES DU LANCER D'UNE PIÈCE

Nous lançons une pièce de 1 € sous la caméra puis écrivons au tableau : « Proposez un modèle probabiliste de cette expérience aléatoire (issues et probabilités) » (**travail individuel très bref**). Un élève propose l'issue *tranche* et nous lui demandons quelle probabilité il propose pour cette issue. Finalement, on décide que cette issue est tellement rare – voire impossible – qu'on peut ne pas en tenir compte. On peut prendre ce genre de décision quand on modélise. Nous choisissons finalement deux issues : *pile* (côté pile vers le haut) et *face* (côté face vers le haut). Le côté pile est celui sur lequel est écrit la valeur de la pièce, le côté face est celui qui comporte un dessin, jadis la « face » du roi ou de l'Empereur.

Ensuite, nous notons au tableau : « Nous devons maintenant choisir les probabilités de pile et de face, notées p et q » (**travail individuel très bref**). Certains élèves proposent de lancer une pièce plusieurs fois et de calculer des fréquences ; d'autres disent qu'on peut choisir $\frac{1}{2}$ pour p et pour q car « les deux côtés sont pareils ». Nous allons étudier ces deux idées l'une après l'autre.

Probabilités choisies à partir de fréquences observées

Pour gagner du temps, nous avons demandé à Mme R., retraitée, d'effectuer 250 lancers d'une pièce de 1 €. Le test a été réalisé dimanche 18 décembre 2016 entre 21 h 36 et 22 h 22. Nous projetons la feuille de calcul 250_lancers_d'une_piece.ods remplie par Mme R. En commençant par A1 et en finissant par J25, elle a écrit dans chaque cellule 1 pour pile et 0 pour face.

Les élèves veulent savoir le nombre de 1 et de 0. Nous montrons comment faire avec la fonction NB.SI, puis avec la fonction SOMME pour les 1. On obtient 131 piles et 119 faces, ce qui donne des fréquences de 0,524 et 0,476. On peut alors choisir $p = 0{,}52$ et $q = 0{,}48$.

Probabilités choisies à partir de considérations de symétrie

Nous demandons aux défenseurs de ce modèle de le justifier. Un élève précise que les « motifs » ne sont pas tout à fait les mêmes des deux côtés mais qu'on peut décider de négliger cette différence. Un autre explique que dans la vie de tous les jours, un tirage à pile ou face sert à choisir au hasard entre deux possibilités qui ont des chances égales, ce qui veut dire qu'on suppose que les deux probabilités sont les mêmes. Nous validons tout cela.

Compatibilité du modèle d'équiprobabilité avec les 250 lancers réels (simulation au tableur)

EXERCICE (AU TABLEAU)

Le choix « $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$ » est-il compatible avec les 250 lancers de Mme R. ?

Travail individuel très bref, puis plénière. Un élève répond que non car avec $p = q = \frac{1}{2}$, on devrait obtenir 125 piles et 125 faces. Cet argument est invalidé par d'autres élèves : « À cause du hasard, on pourrait avoir 126 et 124, ou bien 127 et 123… ».

La question est de savoir si on peut aller jusqu'à 131 et 119 avec une pièce équilibrée, mais comment s'en procurer une ? Par contre, on dispose des fonctions de simulation d'expérience aléatoire du tableur LibreOffice Calc.

Nous ouvrons une feuille de calcul, écrivons « =ALEA.ENTRE.BORNES(0;1) » en A1 et « exécutons » plusieurs fois la formule (Ctrl+Maj+F9). Comme le `randint (0, 1)` de Python, cette formule simule le tirage au sort de 0 ou de 1 avec équiprobabilité. Les élèves s'expriment librement sur ce qui vient de se passer : « C'est génial ! », « Je n'ai pas confiance, c'est un ordinateur », « Qu'est-ce que l'aléatoire ? » ou « Comment un ordinateur peut-il faire quelque chose au hasard ? ». Nous parlons du travail mathématique et informatique sous-jacent à l'élaboration de cette fonction, et disons que l'on peut se fier à ce type de fonctions utilisées par des chercheurs et des ingénieurs dans le monde entier pour gagner du temps et ainsi éviter de réaliser pour de vrai certaines expériences aléatoires. En réponse à la dernière question des élèves (Comment un ordinateur peut-il faire quelque chose au hasard ?), nous expliquons que les nombres renvoyés par la fonction sont déterministes (on pourrait les prévoir), mais qu'ils ressemblent très fortement aux résultats d'un tirage aléatoire.

Ensuite, nous simulons 250 lancers en recopiant le contenu de la cellule A1 vers le bas jusqu'à la ligne 250, et déterminons le nombre de 1 et de 0 en écrivant =NB.SI(A1:A250;1) et =NB.SI(A1:A250;0) dans deux cellules vides. Nous mettons à jour la feuille plusieurs fois (Ctrl+Maj+F9). Assez vite, une valeur supérieure ou égale à 131 apparaît, ce qui montre la compatibilité de 131 et 119 avec une hypothèse d'équiprobabilité.

Quel est le meilleur modèle ?

Après débat, nous arrivons à la conclusion qu'on peut décider que la pièce n'est pas équilibrée – auquel cas on choisit le premier modèle – ou bien que la pièce est équilibrée – auquel cas on choisit le second.

Nous nous mettons d'accord sur le fait qu'à l'avenir, quand « équilibré » figure dans un énoncé, cela sous-entend qu'un modèle d'équiprobabilité est satisfaisant.

Le bilan est fait à partir du bilan P1 n° 5. Il contient la description des deux modèles du lancer de la pièce, puis une section intitulée « Compatibilité de l'hypothèse d'équiprobabilité avec les 250 lancers réels (simulation avec un tableur) ».
Sur la page « Fonctions du tableur de LibreOffice » du cahier de résumés, les élèves écrivent :
=ALEA.ENTRE.BORNES(*n*;*m*) renvoie un nombre entier au hasard entre *n* et *m* avec équiprobabilité.
=NB.SI(plage de données;*x*) renvoie le nombre de cellules d'une plage de données dont la valeur vaut *x*.
Ctrl+Maj+F9 force la mise à jour des cellules.

EXERCICE DE SIMULATION

On souhaite avoir une idée du nombre de 1, de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6 qu'il est possible d'obtenir quand on lance 600 fois un dé classique équilibré. Plutôt que d'effectuer plusieurs séries de 600 lancers réels, vous allez simuler cela avec un tableur.

1. À l'aide d'un tableur, simulez au moins 10 fois 600 lancers d'un dé équilibré en notant à chaque fois le nombre de 1, de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6 obtenus.
Astuce : utilisez Ctrl+Maj+F9 pour actualiser les données, c'est-à-dire pour simuler de nouveaux tirages sans avoir à refaire une nouvelle feuille de calcul.

2. Remplissez le tableau ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6
Nombre minimal d'apparition au cours d'une simulation de 600 lancers.						
Nombre maximal d'apparition au cours d'une simulation de 600 lancers.						
Fréquence minimale observée au cours d'une simulation de 600 lancers (en %).						
Fréquence maximale observée au cours d'une simulation de 600 lancers (en %).						

Nous expliquons aux élèves ce que nous attendons d'eux, notamment comment remplir le tableau de l'énoncé. Nous insistons sur la nécessité de faire ce travail sur tableur chez eux (pour ne pas y consacrer une heure en salle informatique). Les élèves disposent de plusieurs jours pour faire ce travail.

Travail à la maison, puis plénière. Question 1. Un élève vient devant l'ordinateur faire la simulation.
Question 2. Quelques productions d'élèves sont projetées et commentées. Les fréquences minimales et maximales sont comparées avec $\frac{1}{6}$.

Nous projetons 600_lancers_d'un_dé.ods qui contient un tableau similaire à celui de l'énoncé et dont les deux premières lignes ont été remplies avec les résultats des simulations que nous avons faites nous-mêmes. Nous demandons comment remplir les deux dernières lignes de manière efficace (**travail individuel très bref**).

Les élèves dont le tableau n'était pas bien rempli collent un tableau que nous avons rempli.

EXERCICE DE DELPHINE ET AMINATA

Dans le porte-monnaie de Delphine, il y a 3 pièces de 5 centimes, 2 pièces de 10 centimes et 1 pièce de 20 centimes.
Une pièce tombe du porte-monnaie et Delphine la donne à sa fille Aminata.
On considère les trois événements suivants.
A : Aminata reçoit 5 centimes ou 10 centimes.
B : La pièce reçue ne suffit pas à Aminata pour acheter un bonbon à 10 centimes.
C : La pièce reçue suffit à Aminata pour acheter un bonbon à 10 centimes.

1. On choisit un premier modèle à six issues équiprobables notées c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, v où c, d, v signifient cinq, dix et vingt.
Avec ce modèle, écrivez A, B et C sous forme d'ensemble, puis déterminez $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

2. On choisit un deuxième modèle à trois issues notées c, d et v.
Proposez de bonnes valeurs pour les probabilités de ces trois issues.
Avec ce modèle, écrivez A, B et C sous forme d'ensemble, puis déterminez $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Question 2. Se pose la question de la justification du choix des probabilités des issues. On peut faire intervenir un souci de cohérence avec le premier modèle.

Une fois la plénière terminée, en guise de premières utilisations, nous projetons l'exercice suivant : « Une urne opaque contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 rouges et 2 bleues. On tire au hasard une boule dans l'urne. Proposez une “bonne probabilité” pour l'événement “Tirer une boule rouge” » (**travail individuel très bref**), puis nous remplaçons au tableau 5, 3 et 2 par N, n et $N - n$ et reposons la question (**travail individuel très bref**).

La formule probabilité $= \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$ est exhibée : elle est valable lorsque toutes les issues sont équiprobables, ce qui n'est pas toujours le cas. Aucune trace de cette formule n'est laissée dans le cahier de bord. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Probabilités (I à V).

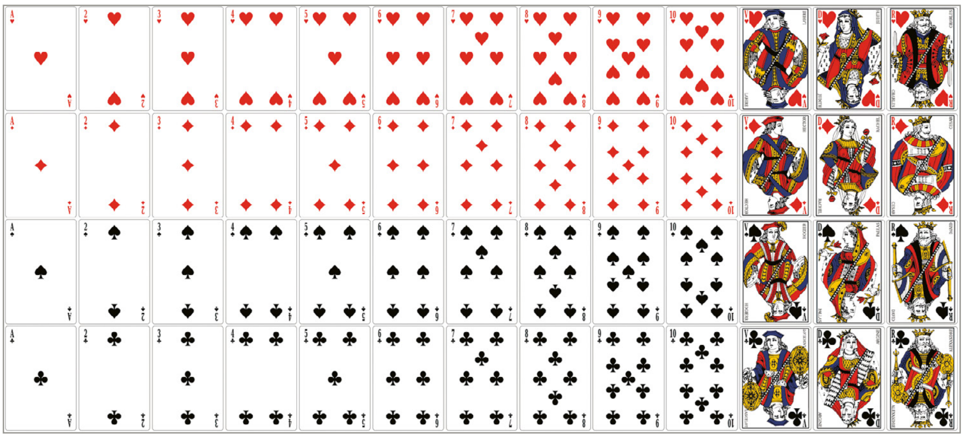
2. Pour être cohérent avec le modèle de la question 1 qui était satisfaisant, on choisit $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$.

$A = \{c\ ;\ d\}$ $\quad B = \{c\}$ $\quad C = \{d\ ;\ v\}$ $\quad$ puis $P(A) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ $\quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

EXERCICES DE PROBABILITÉS

Exercice 1
On jette un dé équilibré et on choisit comme univers : $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
On note S l'événement « Le dessin obtenu a exactement deux axes de symétrie. »
Écrivez S sous forme d'ensemble, puis proposez une bonne valeur pour $P(S)$.

Exercice 2
Voici un jeu français de 52 cartes.
Sur la 1re ligne, il y a les 13 cœurs. Ce sont des cartes rouges.
Sur la 2e ligne, il y a les 13 carreaux. Ce sont des cartes rouges.
Sur la 3e ligne, il y a les 13 piques. Ce sont des cartes noires.
Sur la 4e ligne, il y a les 13 trèfles. Ce sont des cartes noires.



Source : D'après « Jeu de cartes français », wikipedia.org

On tire une carte au hasard dans le jeu et on considère les événements suivants.
V : tirer un valet
T : tirer un trèfle
R : tirer une carte rouge
V ou T ; V et T ; R ou T ; R et T ; ni V ni T.

1. Pour cette expérience aléatoire, on choisit un premier modèle avec 52 issues équiprobables : les 52 cartes.
Avec ce modèle, quelles sont les probabilités des événements précédents ?

2. On choisit maintenant un second modèle avec 4 issues équiprobables : cœur, carreau, pique, trèfle.
Avec ce modèle, on peut déterminer les probabilités de certains des événements précédents : lesquels ?

Exercice 3
La fonction Python `randint` peut être utilisée à condition de l'importer à partir de la bibliothèque `random`. Elle retourne aléatoirement un des nombres entiers compris entre le premier et le second argument, avec équiprobabilité.
Que peut-il s'afficher quand on exécute le programme Python ci-après et avec quelle probabilité ?

```
from random import randint
if randint(-2, 2) > 0:
    print("gagné")
else:
    print("perdu")
```

Les exercices sont donnés un par un, en classe ou à la maison. Les élèves les plus rapides peuvent faire un exercice similaire à l'exercice 3 avec la condition `if 2*randint(-5, 5) + 4 > 0`.

Exercice 1

[Sans rédiger] S = $\{2 ; 3 ; 6\}$ et $P(S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Le bilan est fait à partir du bilan P1 n° 6. Il contient un tableau récapitulatif.

Exercice 3

Il s'affiche « gagné » si randint retourne 1 ou 2, « perdu » si randint retourne – 2 ou – 1 ou 0.

« Gagné » s'affiche avec probabilité $\frac{2}{5}$, « perdu » avec probabilité $\frac{3}{5}$.

ÉTAPE 4

Exercices de synthèse

Phase de prise en main de notions du collège | 40 minutes

EXERCICE DES ÉVÉNEMENTS CONTRAIRES

Complétez le tableau.

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE	UNIVERS	ÉVÉNEMENT (PHRASE, ENSEMBLE ET PROBABILITÉ)	ÉVÉNEMENT CONTRAIRE (PHRASE, ENSEMBLE ET PROBABILITÉ)
Lancer le Lego	$\Omega = \{b\ ;\ c\ ;\ t\}$	A : tomber sur la base ou le côté. $A = \{b\ ;\ c\}$ $P(A) = 0{,}29 + 0{,}21 = 0{,}50$	$\bar{A}$: ne tomber ni sur la base ni sur le côté. $\bar{A} = \{\ldots\}$ $P(\bar{A}) = \ldots$
Lancer un dé classique équilibré	$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$	D : obtenir un nombre pair. $D = \{\ldots\}$ $P(D) = \ldots$	$\bar{D}$: ... $\bar{D} = \{\ldots\}$ $P(\bar{D}) = \ldots$
		T : obtenir un nombre multiple de 3. $T = \{\ldots\}$ $P(T) = \ldots$	$\bar{T}$: ... $\bar{T} = \{\ldots\}$ $P(\bar{T}) = \ldots$
		I : obtenir un nombre pair et multiple de 3. $I = \{\ldots\}$ $P(I) = \ldots$	$\bar{I}$: ... $\bar{I} = \{\ldots\}$ $P(\bar{I}) = \ldots$
		R : obtenir un nombre pair ou multiple de 3. $R = \{\ldots\}$ $P(R) = \ldots$	$\bar{R}$: ... $\bar{R} = \{\ldots\}$ $P(\bar{R}) = \ldots$

Travail individuel pour remplir les deux premières lignes, puis en **équipes**, puis **plénière**.
Travail à la maison pour finir, puis en **équipes**, puis **plénière**.

EXERCICE DES DEUX MODÈLES

Une urne opaque contient des boules blanches et des boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne ; on en tire une deuxième, on la remet dans l'urne, etc. On tire ainsi au total 250 boules : 141 blanches et 109 noires.
Proposez un modèle probabiliste de l'expérience « tirer une boule dans l'urne » le meilleur possible.

2. On apprend qu'il y a au total 23 boules dans l'urne. On considère maintenant le modèle d'équiprobabilité dont les 23 issues sont les 23 boules.
Soit b le nombre de boules blanches. Exprimez, en fonction de b, la probabilité de tirer une boule blanche.

3. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

3. Le premier modèle est probablement bon car on a fait beaucoup de tirages (250). Donc les deux modèles devraient donner à peu près la même chose : on devrait avoir $\frac{b}{23} \simeq 0{,}564$ d'où $b \simeq 12{,}97$. Il y a donc probablement 13 boules blanches dans l'urne et par conséquent 10 boules noires.

SÉQUENCE 4

Probabilités (2e partie) (P2)

Au cycle 4, les calculs de probabilités, à partir de dénombrements, s'appliquaient à des contextes simples faisant prioritairement intervenir une seule épreuve. Pour le cas de deux épreuves, des tableaux à double entrée ont été introduits (la notion d'arbre ne figure pas au programme). Les élèves ont simulé des expériences aléatoires à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de programmation.

PROGRAMME 2019

Probabilités

– Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.
– Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
– Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.
– Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
– L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, [...] puis les travaux [...] de Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane [...] peut être évoqué.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

– **Étape 1** : Expériences aléatoires à plusieurs épreuves. Tableaux et arbres. Simulations avec tableur.
– **Étape 2** : Réunion et intersection de deux événements.
Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

ÉTAPE 1
Expériences aléatoires à plusieurs épreuves

Phase de prise en main | ⏱ 4 heures

Attention : Pour cette étape, nous confectionnons une pièce sur laquelle nous avons collé les étiquettes « Croix » et « Pile » ; un dé avec des étiquettes vert clair numérotées 1, 2, 2, 3, 3, 4 collées sur les faces ; un autre dé avec des étiquettes vert foncé numérotées 1, 3, 4, 5, 6, 8.

LE JEU DE CROIX OU PILE

À l'aide des diapositives 1 et 2, d'un portrait de d'Alembert, d'une image de la couverture de l'*Encyclopédie* et d'une image de l'article « Croix ou pile » figurant dans l'*Encyclopédie*, nous présentons Jean Le Rond d'Alembert, l'*Encyclopédie* et le jeu de Croix ou pile. Nous vérifions que les élèves ont bien compris les règles en faisant une ou deux parties sous la caméra avec une fausse pièce marquée « Pile » et « Croix ».

EXTRAIT DE L'ARTICLE « CROIX OU PILE »

« Ce jeu, qui est très connu et qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera *croix* en jouant deux coups consécutifs [c'est-à-dire qu'on tombera au moins une fois sur *croix*]. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, et suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.

PREMIER COUP	SECOND COUP
Croix	Croix
Pile	Croix
Croix	Pile
Pile	Pile

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. [...]
Cependant, cela est-il bien exact ? [...] Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup ? Car dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, et le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons possibles :
– *croix*, premier coup ;
– *pile*, *croix*, premier et second coup ;
– *pile*, *pile*, premier et second coup.
Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. [...] Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard. »

Extrait de l'article « Croix ou pile », Jean Le Rond d'Alembert, *Encyclopédie*, 1754.

Étude de l'article et conjectures

Les élèves lisent l'article et posent des questions. Nous discutons, entre autres, de la signification de « 3 contre 1 à parier » (respectivement « 2 contre 1 à parier »). En langage moderne, on dirait « 3 chances sur 4 de gagner » (respectivement « 2 chances sur 3 »), c'est-à-dire avec probabilité $\frac{3}{4}$ ou 0,75 (respectivement $\frac{2}{3}$ ou environ 0,67). La question qui nous intéresse est de déterminer la probabilité de gagner sous l'hypothèse que la pièce est équilibrée.

« Tous les auteurs » pensent qu'il y a 3 chances sur 4 de gagner, c'est-à-dire que la probabilité de gagner est $\frac{3}{4}$.
D'Alembert pense qu'il n'y a que 2 chances sur 3 de gagner, c'est-à-dire que la probabilité de gagner est $\frac{2}{3}$.
On suppose la pièce équilibrée : quelle est alors la probabilité de gagner ?

Travail individuel très bref, puis plénière. Nous faisons un sondage : qui pense que d'Alembert a raison ? Qui pense que « tous les auteurs » ont raison ? Qui pense que personne n'a raison ? La majorité des élèves est d'accord avec d'Alembert. Nous proposons de simuler 10 000 parties pour le confirmer. Nous demandons combien on devrait alors obtenir de parties gagnantes approximativement si d'Alembert avait raison et si tous les auteurs avaient raison (**travail individuel très bref**). Diverses méthodes sont employées : calculer $\frac{2}{3}$ de 10 000 ou 66,7 % de 10 000 ou écrire $\frac{2}{3} \simeq \frac{6\ 667}{10\ 000}$, etc.

Simulation de 10 000 parties à l'aide d'un tableur

Nous demandons aux élèves de chercher dans leur cahier de résumés quelles fonctions de LibreOffice pourraient servir : plusieurs proposent ALEA.ENTRE.BORNES(0;1). Nous convenons que 1 correspondra à croix et 0 à pile.

Nous ouvrons une feuille de calcul, écrivons =ALEA.ENTRE.BORNES(0;1) en A1 et actualisons plusieurs fois la feuille (Ctrl+Maj+F9). Puis nous écrivons =SI(A1=1;""; ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)) en B1 en expliquant comment s'utilise la fonction SI. Nous avons ainsi simulé une partie de Croix ou pile. Nous faisons plusieurs simulations jusqu'à ce que les trois cas possibles apparaissent.

Travail individuel très bref pour réfléchir à la manière de poursuivre la simulation, puis **plénière**. Les élèves proposent de copier-coller le contenu des cellules A1 et B1 vers le bas. Pour coller rapidement, nous écrivons A1:B10000 dans la zone de nom en haut à gauche, puis collons le contenu copié. Nous examinons un peu les résultats et demandons comment faire pour déterminer le nombre de parties gagnées (**travail individuel très bref**). Un élève vient devant le clavier et écrit sa proposition dans une cellule vide sans appuyer sur « Entrée ». Quand une proposition correcte telle que =NB.SI(A1:B10000;1) ou =SOMME(A1:B10000) est écrite, nous redemandons aux élèves ce qu'ils pensent qu'on va obtenir. Finalement, l'élève appuie et… obtient un nombre beaucoup plus proche de 7 500 que de 6 667 ! C'est la stupeur dans la classe ! L'élève recommence plusieurs fois et, à chaque fois, nous notons le nombre de parties gagnées au tableau. Nous concluons : « Donc d'Alembert avait tort, comme la majorité d'entre vous. Vous avez le même niveau qu'un grand savant du XVIIIᵉ siècle en probabilités ! Le modèle de d'Alembert n'est pas bon alors que celui de "tous les auteurs" semble bien meilleur, bien qu'il soit "bizarre" comme d'Alembert l'a fait remarquer. » La feuille de calcul est sauvegardée pour la suite du travail.

Le bilan est fait à partir du bilan P2 nº 1 ci-dessous. Les élèves complètent les trous à l'aide des résultats obtenus en classe.

On a décidé de simuler plusieurs fois 10 000 parties avec un tableur :

– si d'Alembert avait raison, on devrait obtenir environ 6 667 parties gagnées car $\frac{2}{3}$ de 10 000 ≃ 6 667 ;

– si tous les auteurs avaient raison, on devrait obtenir environ 7 500 parties gagnées car $\frac{3}{4}$ de 10 000 ≃ 7 500.

Pour la simulation, on a utilisé ALEA.ENTRE.BORNES(0;1) et SI(A1=1;"";ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)).
À chaque fois, le nombre de parties gagnantes a été compris entre .... et ....
Conclusion : le modèle de d'Alembert n'est pas bon et celui de « tous les auteurs » semble bien meilleur.

Erreur de d'Alembert : analyse et correction

Nous projetons les deux questions suivantes : « Quelle erreur d'Alembert a-t-il commise ? Déterminez la probabilité de gagner par un raisonnement autre que celui de "tous les auteurs". »

Travail individuel, puis en équipes pour écrire une production commune en mettant les titres « Erreur de d'Alembert » et « Calcul de la probabilité de gagner ».

Plénière. Les productions sont étudiées. L'erreur est d'avoir supposé les trois issues équiprobables. Quand, dans d'autres exercices, des élèves supposeront à tort que des issues sont équiprobables, nous ferons référence à « l'erreur de d'Alembert ».

Les raisonnements qui attribuent aux issues les probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$ sont illustrés à l'aide de la feuille de calcul sauvegardée : nous utilisons NB.SI pour déterminer le nombre de parties gagnées en un coup (respectivement deux coups).

Des productions d'équipes, éventuellement annotées, sont collées.

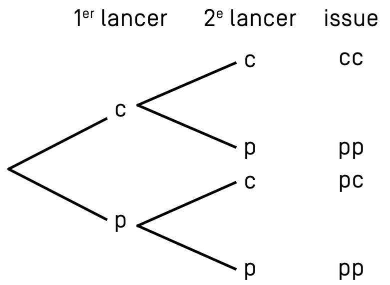
Analyse du raisonnement de « tous les auteurs »

Nous projetons l'exercice suivant : « Le raisonnement de “tous les auteurs” est “bizarre” car il ne correspond pas tout à fait au jeu de Croix ou pile. Pourtant, il donne le bon résultat. Pourquoi ? ».

Travail individuel, puis plénière. Il émerge que l'expérience aléatoire considérée par « tous les auteurs » est un peu différente d'une partie de Croix ou pile, mais en ce qui concerne la probabilité de gagner, *elle revient au même* si l'on considère les issues cc et cp gagnantes. Les auteurs supposent ensuite leurs quatre issues équiprobables, ce qui est naturel, et ils obtiennent $\frac{3}{4}$ comme probabilité de gagner car il y a trois issues gagnantes sur 4, ce qui est correct.

Enfin, nous demandons aux élèves s'ils savent comment les mathématiciennes et les mathématiciens représentent graphiquement l'expérience « Lancer deux fois de suite une pièce ». Des élèves viennent au tableau faire quelques tentatives, puis le tableau et l'arbre suivants sont projetés (diapositive 3) et commentés (nous disons que les branches de l'arbre sont des « chemins que le hasard nous fait prendre »).

2e LANCER / 1er LANCER	c	p
c	cc	cp
p	pc	pp



Autre raisonnement possible

Enfin, nous présentons un autre raisonnement possible, qui ressemble à ce qui avait été fait à la fin de l'exercice du jeu de Ségo. On imagine 10 000 parties et on représente les nombres moyens d'obtention de chaque résultat sur un arbre (diapositive 4). On gagne en moyenne 7 500 parties sur 10 000, ce qui donne $\frac{3}{4}$ comme probabilité de gain.

Le bilan est fait à partir du bilan P2 n° 2 contenant l'analyse du raisonnement de tous les auteurs ainsi qu'un tableau et un arbre correspondants.

EXERCICE DE LA DERNIÈRE CHANCE

Tu es presque au terme de ton existence. La Faucheuse est là, mais elle te donne une dernière chance et te dit : « Voilà quatre dés cubiques équilibrés :
– un dé bleu clair avec les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;
– un dé bleu foncé avec les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;
– un dé vert clair avec les numéros 1, 2, 2, 3, 3, 4 ;
– un dé vert foncé avec les numéros 1, 3, 4, 5, 6, 8.
Choisis les deux verts ou bien les deux bleus, et donne-moi les deux autres.
Choisis un nombre entier S entre 2 et 12.

Puis chacun lancera ses deux dés et fera la somme des deux nombres obtenus :
– si tu obtiens S et pas moi, tu as la vie sauve ;
– si j'obtiens S et pas toi, je te fauche ;
– si nous obtenons tous les deux S ou si aucun ne l'obtient, nous recommençons.
Alors, quels dés choisis-tu ? Quel nombre choisis-tu ? Réfléchis bien car c'est ta dernière chance ! »

Jean Alaux, *La Faucheuse*, tombeau de Jean Catherineau, cimetière de la Chartreuse, Bordeaux, 1875.

© Photo Cedric 33
Source : fotocommunity.net

Explication du jeu et premières réflexions

Pour information, les numéros des faces des dés verts sont ceux des fameux dés de Sicherman. Un élève volontaire n'ayant pas peur de la mort, en l'occurrence Noémie, vient près du bureau. Nous lui présentons le jeu en jouant le rôle de la Faucheuse. Elle choisit sa couleur et son nombre (si elle choisit 2, 3, 11 ou 12, nous lui demandons de plutôt choisir un nombre entre 4 et 10 pour éviter une partie trop longue). Puis nous faisons une partie avec elle en jetant les dés dans une petite boîte disposée sous la caméra.

Travail individuel très bref pour chercher une stratégie gagnante, puis **plénière de régulation**. Nous laissons les élèves faire quelques propositions générales, sans rien valider. Puis nous donnons intentionnellement la parole à Amir qui voulait choisir une somme paire, en l'occurrence 8 : il dit à la classe qu'il a envie de choisir 8 et les dés verts. Nous répondons : « D'accord, essayons avec la somme 8. Comment faire pour savoir si Amir a eu raison de choisir les dés verts ? ». Il émerge qu'il faut calculer la probabilité d'obtenir 8 avec les dés bleus, celle d'obtenir 8 avec les dés verts, puis les comparer.

Noémie a intérêt à choisir une couleur et une somme S de telle sorte que la probabilité d'obtenir S avec sa couleur soit « la plus grande possible par rapport à la probabilité d'obtenir S avec l'autre couleur ».
Amir a proposé de choisir la somme 8 et les dés verts.

Par la suite, si certains élèves trouvent la solution de l'exercice bien avant les autres, nous leur demandons de garder le secret et leur donnons l'exercice suivant (pour info : il y a une seule solution, à savoir 1, 2, 2, 3 et 1, 3, 3, 5).

Exercice des dés de Sicherman tétraédriques
Un tétraèdre est un polyèdre à quatre faces. Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux de même taille.
On dispose de quatre dés en forme de tétraèdre régulier, équilibrés :
– un bleu clair dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 et un bleu foncé avec les mêmes faces que le bleu clair ;
– un vert clair et un vert foncé dont les faces sont numérotées avec des entiers strictement positifs, mais différemment des bleus.
La probabilité que la somme soit 2 avec les dés bleus est la même que la probabilité que la somme soit 2 avec les dés verts. Idem pour 3, pour 4, pour 5, pour 6, pour 7 et pour 8.
Quels peuvent être les numéros inscrits sur les faces des dés verts ?

Probabilité d'obtenir la somme 8 avec les dés bleus (respectivement verts)

Travail individuel pour calculer la probabilité d'obtenir 8 avec les dés bleus. Ceux qui ont fini poursuivent.

Plénière. Un élève dit que la probabilité est de $\frac{1}{11}$ car il y a 11 sommes possibles. Un autre réagit en disant qu'une somme de 2 est beaucoup plus rare qu'une somme de 7. Cette erreur est rapprochée de celle de d'Alembert.

Ensuite émergent des questions telles que « 6 – 2 et 2 – 6, ça compte pour un ou ça compte pour deux ? ». Finalement, deux modèles sont proposés et notés au tableau.
- Modèle 1 : Il y a trois issues favorables qui sont « 2 et 6 », « 3 et 5 » et « 4 et 4 ». Avec cette manière de compter les issues, il y en a 21 possibles (nous passons vite là-dessus, quitte à le faire nous-même). Donc la probabilité d'obtenir 8 est $\frac{3}{21} \simeq 0{,}1429$.
- Modèle 2 : Il y a cinq issues favorables (2 – 6 ; 3 – 5 ; 4 – 4 ; 5 – 3 ; 6 – 2 ; on donne le résultat du dé bleu clair en premier) sur 36 (nous projetons un tableau fait par un élève), ce qui donne une probabilité d'obtenir 8 égale à $\frac{5}{36} \simeq 0{,}1389$.

Pour savoir quel modèle est le bon, il y a un moyen très simple : simuler 10 000 lancers de deux dés équilibrés sur ordinateur et calculer la fréquence de l'événement « La somme vaut 8 ». Nous ouvrons le fichier Simulation_10000_lancers_de_2_dés.ods, complétons les cellules F1 et F2 avec la somme choisie (8 ici) et faisons plusieurs essais : il est alors clair qu'on ne doit pas choisir $\frac{3}{21}$ alors que $\frac{5}{36}$ est tout à fait satisfaisant.

Nous demandons ensuite pourquoi le modèle 1 n'est pas bon (**travail individuel très bref**). C'est encore l'erreur de d'Alembert : il ne faut pas supposer « 2 et 6 » et « 4 et 4 » équiprobables. Pour l'illustrer, nous affichons les colonnes I, J, K et L du fichier précédent et saisissons 2, 6, 6, 2, 4, 4 en J1, L1, J5, L5, L9, J9. On obtient alors les fréquences de 2 – 6, 6 – 2 et 4 – 4, ce qui montre que « 2 et 6 » est environ deux fois plus fréquent que « 4 et 4 ». En outre, cette simulation conforte le modèle 2 dans la mesure où les fréquences de 2 – 6, 6 – 2 et 4 – 4 sont toutes proches de $\frac{1}{36}$. Nous concluons ainsi : « Les simulations confirment donc le raisonnement rudimentaire suivant :
- « 2 et 6 » peut être obtenu de deux manières : 2 avec le dé bleu clair, 6 avec le dé bleu foncé, ou inversement ;
- « 4 et 4 » ne peut être obtenu que d'une seule manière : « 4 avec le dé bleu clair, 4 avec le dé bleu foncé » ;
- donc on ne doit pas supposer que « 2 et 6 » et « 4 et 4 » sont équiprobables ;
- on a intérêt à « tenir compte de l'ordre » et à considérer 36 issues équiprobables.

La notion de *couple de nombres* est pratique pour noter les 36 issues car les couples (6 ; 2) et (2 ; 6) sont différents. Les 36 issues correspondent ainsi aux 36 couples (c ; f) où c représente le résultat du dé bleu clair et f celui du dé bleu foncé. »

Travail individuel pour calculer la probabilité d'obtenir 8 avec les dés verts. Ceux qui ont fini poursuivent.

Travail en équipes, puis plénière. Une équipe propose de choisir 4 × 6 = 24 issues. Il émerge que ce n'est pas pratique car (2 ; 8) est plus probable que (1 ; 8) (on donne le résultat du dé vert clair en premier). Une autre équipe propose de considérer 36 issues équiprobables, en distinguant les faces 2 et les faces 3 du dé vert clair, en les notant par exemple $2a$, $2b$, $3a$ et $3b$. Nous validons ce choix, puis **travail individuel très bref** pour déterminer les issues favorables et conclure. Il émerge que la probabilité d'obtenir une somme de 8 avec les deux dés verts est également de $\frac{5}{36}$.

On demande alors quelles sont les chances d'Amir de gagner s'il choisit la somme 8 et les dés verts (**travail individuel très bref**). Par symétrie, il a autant de chance de gagner que de perdre, donc il a 1 chance sur 2 de gagner.

Le bilan est fait à partir du bilan P2 nº 3 contenant des explications concernant le modèle choisi pour le lancer des dés bleus (respectivement verts), le calcul de la probabilité d'obtenir 8 avec les dés bleus (respectivement verts) et la conclusion (la probabilité qu'Amir gagne est de 50 %).

Résolution du problème

Un élève fait une autre proposition, par exemple choisir 9 et les dés bleus. Nous demandons s'il est possible d'étudier toutes les propositions en même temps. Un élève propose de faire un arbre pour représenter les résultats des lancers des dés bleus et un autre pour les dés verts. Nous projetons rapidement l'arbre fait par un élève et il apparaît qu'il est plus pratique ici de faire des tableaux.

Travail personnel avec entraide pour faire les tableaux. Quand tout le monde a compris comment faire, nous interrompons le travail individuel, puis distribuons le document Tableaux des sommes qui contient un tableau à double entrée pour la somme des dés bleus, un autre pour la somme des dés verts, ainsi que le tableau ci-dessous.

SOMME	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité avec les dés bleus	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$
Probabilité avec les dés verts	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$	$\frac{\ }{36}$

Travail personnel avec entraide pour remplir le tableau ci-dessus et conclure, puis **plénière**. Les élèves constatent que, quelle que soit la somme choisie, les deux probabilités sont égales, donc toutes les stratégies donnent une chance sur deux de gagner ! Si certains élèves sont déçus, nous disons qu'il y a quand même des stratégies qui augmentent l'espérance de vie. Un élève dit que si on veut jouer le plus longtemps possible pour « profiter encore un peu de la vie », il vaut mieux choisir $S = 2$ ou $S = 12$. Pour terminer, nous projetons un diagramme en bâtons où les probabilités précédentes sont représentées (diapositive 5).

Les élèves remplissent le tableau.
Chacune des sommes entre 2 et 12 a la même probabilité d'être obtenue avec les dés bleus qu'avec les dés verts.
Donc toutes les stratégies se valent !

EXERCICE DU DÉ ET DE LA PIÈCE

On lance un dé classique équilibré, puis une pièce équilibrée.
1. Représentez cette expérience aléatoire à l'aide d'un tableau.
2. Représentez cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.
3. Choisissez un modèle probabiliste de cette expérience, c'est-à-dire les issues et leurs probabilités.

Travail à la maison, puis en équipes. Nous repérons des tableaux et des arbres intéressants pour les projeter.

Plénière. Question 1. Nous projetons un tableau dans lequel les issues sont notées $p1$, $p2$, … Un élève dit qu'il vaut mieux les noter $1p$, $2p$, … car on lance le dé en premier. Il a raison, même si les mathématiciennes et les mathématiciens utilisent plutôt $(1 ; p)$; $(2 ; p)$.
Question 2. Nous projetons le travail d'un élève qui a fait deux arbres : un pour le dé et un autre pour la pièce. L'idée qu'on ne considère qu'une seule expérience composée de deux sous-expériences est difficile pour certains.

Les élèves collent une photocopie d'un tableau et d'un arbre corrects faits par des élèves, suivis du texte :
3. On choisit un modèle à 12 issues $(1 ; p)$, $(2 ; p)$, …, $(6 ; f)$ avec une probabilité de $\frac{1}{12}$ pour chacune.

EXERCICE DES DÉS IDENTIQUES

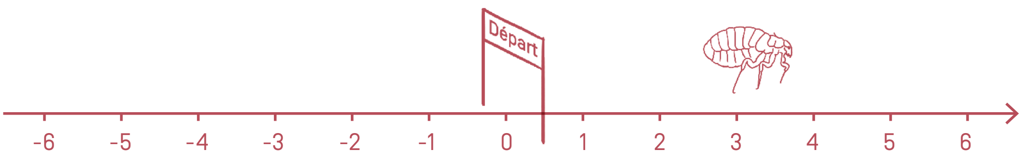
On lance simultanément deux dés classiques identiques et équilibrés.
On note S la somme des deux nombres apparus.
Proposez des « bonnes valeurs » pour $P(S = 3)$, $P(S < 12)$ et $P(S \geq 4)$.

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Le débat porte sur le fait que les dés sont identiques et lancés simultanément. Nous mettons sous la caméra deux dés « identiques », faces 1 et 2 visibles, et demandons de quelle issue il s'agit (**travail individuel très bref**). On pourrait considérer qu'il s'agit de « 3 » mais cela ne permet pas de déterminer $P(S = 3)$ car les 11 sommes possibles ne sont pas équiprobables. On pourrait également considérer qu'il s'agit de « 1 et 2 » (dans le sens {1 ; 2}) mais est-ce que sa probabilité est la même que celle de « 4 et 4 » ? Certainement pas comme on l'a vu précédemment. Il serait pratique de différencier les deux dés, comme dans l'exercice de la dernière chance, mais les dés sont identiques : alors que faire ? Sous la caméra, nous donnons un petit coup de crayon sur un des deux dés et demandons si cela modifie les probabilités. La réponse est évidemment non, ou alors tellement peu que c'est négligeable. Maintenant, les dés sont différents, on peut donc raisonner comme dans l'exercice de la dernière chance. Nous précisons que pour résoudre ce genre d'exercice, on n'a pas besoin de donner effectivement un coup de crayon, il suffit d'imaginer que les deux dés sont différents en leur donnant des numéros.

On fait comme s'il y avait un dé n° 1 et un dé n° 2. On peut alors raisonner comme dans l'exercice de la dernière chance.
On obtient : $P(S=3)=\frac{2}{36}$; $P(S<12)=1-P(S=12)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$; $P(S\geq 4)=1-P(S<4)=1-\frac{3}{36}=\frac{33}{36}$.

EXERCICE DE LA MARCHE ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$

Une puce se déplace sur un axe gradué : elle part de l'origine et effectue un certain nombre de sauts fixé à l'avance. On note N ce nombre de sauts.
À chaque saut, la puce se déplace d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche, de manière aléatoire et équiprobable.



Après les N sauts, la puce se trouve sur un certain point de la droite. On note F l'abscisse de ce point et on se pose deux questions.
– À quels nombres F peut-il être égal ?
– Pour chacun de ces nombres, déterminez la probabilité que F soit égal à ce nombre.

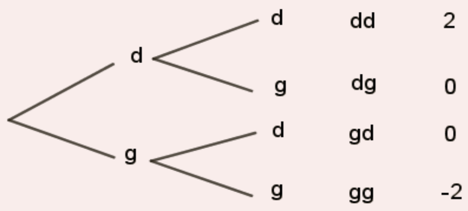
Avant de distribuer l'énoncé, nous expliquons le principe de la marche aléatoire à deux sauts, puis demandons quelles questions on pourrait se poser. Une fois les questions de l'énoncé proposées, nous distribuons l'énoncé.

Travail individuel, puis en équipes pour $N = 2$. Ceux qui ont fini commencent les cas suivants.

Plénière. Une fois établi que F peut valoir -2, 0 ou 2, nous donnons la parole à un élève qui pense que les trois probabilités valent $\frac{1}{3}$. Un autre dit qu'on ne sait pas si les issues sont équiprobables. Puis des élèves qui ont trouvé les bonnes probabilités prennent la parole, mais ont du mal à justifier. Ils disent par exemple qu'il y a « deux fois 0 ». Nous projetons alors le travail d'un élève qui a représenté la situation par un arbre avec les positions successives et a dit que les quatre « chemins » étaient équiprobables. Nous discutons de l'opportunité de décider que ces quatre issues sont équiprobables et le modèle est validé. Enfin, nous expliquons que pour décrire l'expérience et les issues, on fait souvent un arbre où l'on indique les déplacements élémentaires, « *d* » pour droite et « *g* » pour gauche, au lieu des positions successives. À droite de l'arbre, on ajoute une colonne « issue » avec dd, dg, gd, dd et une colonne « *F* » avec 2, 0, 0, –2. Les élèves recopient le texte et l'arbre ci-après.

Cas N = 2

On choisit un modèle avec 4 issues équiprobables : gg, dg, gd, dd.
F peut être égal à –2, 0 ou 2.
$P(F=-2)=\frac{1}{4}$; $P(F=0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $P(F=2)=\frac{1}{4}$



Travail individuel pour N = 3 et N = 4. Ceux qui ont fini réfléchissent au cas N = 10.

Travail en équipes, puis plénière. L'impossibilité de faire un tableau pour trois épreuves est mise en évidence. Le fait que le nombre de « feuilles » de l'arbre soit multiplié par 2 quand *N* augmente de 1 est souligné. Pour N = 4, il n'est pas nécessaire de faire l'arbre, mais nous disons néanmoins que pour dessiner un gros arbre comme celui-là, il est plus simple de commencer par la droite (par les feuilles).

Le bilan est fait à partir du bilan P2 nº 4 contenant l'arbre et les résultats correspondant au cas N = 3 ainsi qu'un tableau récapitulatif pour le cas N = 4.

Étude du cas N = 10

En dehors de la liste des positions finales possibles et du calcul de la probabilité que *F* soit égal à 10 ou – 10, le travail est difficile pour la plupart des élèves. Un élève qui a déjà réfléchi dit qu'il est trop compliqué de faire l'arbre. Nous confirmons et disons qu'on peut quand même trouver les positions finales possibles et le nombre de chemins.

Travail individuel pour étudier le cas N = 10, puis **plénière**. Après quelques échanges, il émerge que les positions finales possibles sont les entiers pairs entre – 10 et 10 ; il y a $2^{10} = 1\,024$ chemins possibles.

Donc $P(F = -10) = P(F = 10) = \frac{1}{1024}$

Certains élèves sont capables de calculer $P(F = 8)$, voire d'aller plus loin. Ils s'expriment rapidement devant la classe. Pour avoir une idée des probabilités qu'on n'arrive pas à calculer, on peut faire une simulation informatique. Nous en ferons une avec le tableur de LibreOffice, puis une autre avec Python (dans la séquence AP2).

Le bilan est fait à l'aide du bilan P2 nº 5 ci-dessous qui comporte une erreur à corriger par les élèves (0,0001 au lieu de 0,001). L'exercice de la marche aléatoire sur un axe (suite) ci-après est distribué sur le même document.

Cas N = 2

F peut être égal à – 10, – 8, – 6, – 4, – 2, 0, 2, 4, 6, 8 et 10.
En imaginant un arbre correspondant aux 10 sauts, on constate qu'il y a $2^{10} = 1\,024$ marches aléatoires de 10 sauts possibles : on choisit donc un modèle avec 1 024 issues équiprobables.
Donc $P(F=-10)=P(F=10)=\frac{1}{1024} \simeq 0{,}0001$ mais il est difficile de calculer les autres probabilités.

EXERCICE DE LA MARCHE ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$ (SUITE)

Pour poursuivre l'étude du cas $N = 10$, on simule à l'aide d'un tableur une marche de 10 sauts.
1. On veut simuler un saut de la puce dans la cellule A1. Pour cela, on souhaite que –1 ou 1 s'affiche de manière équiprobable dans A1.
La formule ALEA.ENTRE.BORNES(–1;1) convient-elle ?
2. La fonction SI permet d'effectuer un test et de retourner un résultat qui dépend du résultat du test. Par exemple, la formule SI(A2=1;"OK";0) retourne OK si la cellule A2 contient la valeur 1 et retourne 0 sinon.
En utilisant les fonctions SI et ALEA.ENTRE.BORNES, écrivez une formule à saisir dans la cellule A1 permettant de simuler un saut de puce comme indiqué dans la question 1.
3. On recopie cette formule dans la cellule B1. On considère la marche à deux sauts dont le premier saut correspond au contenu de A1 et le deuxième saut au contenu de B1. Quelle formule peut-on saisir dans C1 pour que s'y affiche la position de la puce après ces deux sauts ?
4. Comment peut-on simuler une marche aléatoire de 10 sauts ?
5. (Question pour les rapides) Comment simuler un saut *sans* la fonction SI ?

Travail personnel avec entraide, puis plénière. Deux ou trois élèves se succèdent au clavier et font ce que les autres élèves proposent. À partir du fichier obtenu, l'élève au clavier recopie certaines cellules, avec l'aide des autres, pour obtenir 2 000 simulations de marches à 10 sauts. Puis les nombres pairs de –10 à 10 sont écrits sur une plage vide (astuce : saisir –10 et –8 dans deux cellules voisines, les sélectionner et les recopier jusqu'à ce que 10 s'affiche). Nous demandons ensuite comment faire pour obtenir les fréquences des différentes positions finales (**travail individuel très bref**). La fonction NB.SI avec une utilisation astucieuse du $ permet de le faire. Enfin, nous générons un diagramme en bâtons représentant ces fréquences et disons : « Ces fréquences nous donnent une bonne idée des probabilités des différentes positions finales possibles, probabilités qui sont difficiles à calculer en classe de seconde. » Nous faisons fluctuer les fréquences en actualisant la feuille plusieurs fois, puis les élèves commentent ces différentes valeurs.

1. Non car il s'affiche –1, 1 mais aussi 0.
2. Comme ALEA.ENTRE.BORNES(0;1) affiche 0 ou 1 de manière équiprobable, SI(ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)=0;–1;1) affiche –1 ou 1 de la même façon.
3. =A1+B1
4. On recopie le contenu de A1 vers la droite jusqu'en J1.
Dans K1, on saisit : =SOMME(A1:J1). Ainsi K1 contient la position finale après 10 sauts.

Les fréquences observées lors des 2 000 simulations et le diagramme en bâtons sont collés.
Sur la page « Instructions du tableur de LibreOffice » du cahier de résumés, les élèves écrivent :
=SI(test;valeur si vrai;valeur si faux) renvoie la première valeur si le test est vrai, la seconde sinon.

EXERCICE DU DUC DE TOSCANE

Galilée (1564-1642) est un savant italien souvent considéré comme le fondateur de la physique moderne. Il défend l'héliocentrisme, théorie physique qui s'oppose au géocentrisme, en plaçant le Soleil, plutôt que la Terre, au centre de l'Univers. Cela lui vaut des attaques très violentes.
Galilée est aussi l'un des premiers à avoir écrit sur le « calcul des hasards », même si son travail n'a été publié qu'après la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat qui marque officiellement le début de la théorie des probabilités. Il rédige ainsi, vers 1620, un petit mémoire sur les jeux de dés pour répondre à une demande du Duc de Toscane.
Au début du XVIIe siècle, de nombreux jeux de société sont pratiqués en Toscane. Un de ces jeux fait intervenir la somme des nombres sortis lors du lancer de trois dés. Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, constate que la somme 10 est obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Le Duc considère cela comme un paradoxe (un paradoxe est une idée ou une opinion à première vue surprenante ou choquante). Il soumet ce problème au célèbre Galilée qui réussit à le résoudre dans son mémoire, marquant ainsi le début de l'histoire des probabilités.
Dans la suite, on appelle partie le lancer de trois dés équilibrés.

A. La constatation du Duc de Toscane

1. Reproduisez l'expérience du Duc de Toscane à l'aide de l'une des deux méthodes suivantes :
– soit faire 5 000 vraies parties avec trois vrais dés, noter sur votre copie pour chacune des parties la somme des trois nombres apparus et compter le nombre d'apparition de la somme 9 et de la somme 10 ;
– soit simuler 5 000 parties à l'aide d'un tableur et déterminer le nombre d'apparition de la somme 9 et de la somme 10 (écrivez sur votre copie quelles commandes du tableur vous avez utilisées et dans quelles cellules).
2. Le Duc de Toscane avait constaté que sur un grand nombre de parties, la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Faites-vous la même constatation que lui ?
3. Parmi les 5 000 parties, quelle est la fréquence d'apparition de la somme 9 ? Même question pour la somme 10.

B. L'erreur du Duc de Toscane

Le raisonnement du Duc commençait ainsi : « Il y a 6 façons d'obtenir la somme 9 avec trois dés :
$9 = 1 + 2 + 6$ $\quad 9 = 1 + 3 + 5$ $\quad 9 = 1 + 4 + 4$
$9 = 2 + 2 + 5$ $\quad 9 = 2 + 3 + 4$ $\quad 9 = 3 + 3 + 3$ »
1. Faites la même chose pour la somme 10.
2. Le raisonnement du Duc se poursuivait ainsi : « Puisqu'il y a autant de façons d'obtenir la somme 9 que la somme 10, les sommes 9 et 10 devraient sortir aussi souvent l'une que l'autre (*en langage moderne, on dirait que la probabilité d'obtenir 9 devrait être égale à la probabilité d'obtenir* 10). Ceci est en contradiction avec ce que j'ai constaté car j'ai fait beaucoup de parties, et la somme 10 est sortie plus souvent que la somme 9. » Analysez l'erreur de raisonnement du Duc.

C. La méthode de Galilée

La méthode décrite ci-après est une version moderne de celle proposée par Galilée. On numérote les dés 1, 2 et 3. On choisit un modèle d'équiprobabilité où les issues sont les triplets $(a\,;\,b\,;\,c)$, où a est le résultat du dé n° 1, b le résultat du dé n° 2 et c le résultat du dé n° 3. Par exemple, l'issue $(4\,;\,4\,;\,5)$ correspond au cas où le dé n° 1 donne 4, le dé n° 2 donne 4 et le dé n° 3 donne 5.
1. Combien y a-t-il d'issues dans ce modèle ?
2. Parmi ces issues, combien y en a-t-il qui donnent la somme 9 ? Même question pour la somme 10.
3. D'après ce modèle, quelle est la probabilité d'obtenir 9 ? Même question pour la somme 10.
4. Les résultats de la question précédente sont-ils compatibles avec les fréquences d'apparition obtenues à la question A.3 ?

Travail à la maison sur feuille à rendre. Nous corrigeons les copies après avoir sélectionné certains extraits intéressants.

Plénière. Nous projetons les extraits en question et en débattons. Les copies corrigées sont rendues, accompagnées d'un bilan.

ÉTAPE 2

Réunion, intersection, relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Phase d'élaboration | 1h45

EXERCICE DU CONTRÔLE ANTIDOPAGE

Au championnat du monde de tennis de table catégorie double-mixte, les équipes sont composées d'une femme et d'un homme du même pays. De plus, 52 % des équipes sont asiatiques, 38 % sont européennes et 10 % viennent du reste du monde.
On tire au hasard un des athlètes du tournoi pour un contrôle antidopage. On note a cet athlète et on considère les événements suivants. A : a est asiatique ; E : a est européen ; R : a vient du reste du monde ; F : a est une femme ; H : a est un homme.

Complétez le tableau suivant.

ÉVÉNEMENT	A	A ou E	A et R	F ou H	$\bar{E}$	F ou R
Probabilité						

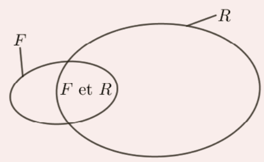
Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Les élèves complètent le tableau au crayon à papier. Pour « A ou E », beaucoup d'élèves ajoutent les probabilités sans arrière-pensée. Beaucoup le font aussi pour « F ou R ». Un élève n'est pas d'accord et dit que dans les 10 % du reste du monde, on a déjà compté les 5 % de femmes, donc qu'il faut seulement ajouter 5 % à 50 %. Nous traduisons son raisonnement par l'égalité $P(F \text{ ou } R) = 50\ \% + (10\ \% - 5\ \%) = P(F) + (P(R) - P(F \text{ et } R))$ et l'illustrons par un diagramme de Venn avec R et F. Puis nous passons à une première utilisation, à savoir le calcul de $P(E \text{ ou } H)$, puis à une deuxième avec l'exercice projeté suivant.

Nous projetons l'exercice suivant : « Dans un lycée, 30 % des élèves font du sport en club et 10 % jouent d'un instrument de musique. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il fasse du sport en club ou qu'il joue d'un instrument de musique ? ».

Travail individuel très bref entrecoupé par une plénière de régulation. Un élève dit qu'on n'en sait pas assez pour répondre. Nous ajoutons alors l'hypothèse « 2 % font du sport en club et jouent d'un instrument de musique ».

Le tableau est rempli avec les calculs, par exemple 0,52 + 0,38 = 0,90.

Attention, $P(F \text{ ou } R) \neq 50\ \% + 10\ \%$ car dans les 10 % du reste du monde, il y a 5 % de femmes.
On a : $P(F \text{ ou } R) = 50\ \% + (10\ \% - 5\ \%)$
$P(F \text{ ou } R) = P(F) + (P(R) - P(F \text{ et } R))$



Nous écrivons au tableau l'exercice suivant : « Calculez $P(E \cap H)$ et $P(E \cup H)$ ».

Travail individuel, puis en équipes. Nous disons aux élèves qui ne connaissent plus la signification de $\cap$ et $\cup$ de se reporter au résumé sur les ensembles (non fourni).

Plénière. Les définitions de l'intersection et de la réunion de deux ensembles ont été vues dans la séquence « Ensembles » (non traitée dans cet ouvrage, voir tableau de progression p. 22) mais ont été peu utilisées en probabilités. Les liens entre $\cap$, $\cup$, « et » et « ou » sont illustrés à l'aide de diagrammes de Venn. Le moyen mnémotechnique « Le symbole $\cup$ ressemble à un *u*, et il y a un *u* dans *ou* et dans *réunion* » est rappelé. Une fois l'exercice résolu, nous passons aux premières utilisations : calculer $P(A \cap F)$; $P(H \cup F)$; $P(A \cap F)$; $P(F \cup R)$ …

Le bilan est fait à l'aide du bilan P2 n° 6 contenant le lien entre $\cap$ *et « et » (respectivement* $\cup$ *et « ou ») ainsi que la relation* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Nous distribuons un seul document contenant ce bilan et l'exercice de français qui suit.

EXERCICE DE FRANÇAIS

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes et on choisit un modèle où chacune des 52 cartes a une probabilité $\frac{1}{52}$ d'être tirée.
Complétez le tableau ci-après.

ÉVÉNEMENT	DESCRIPTION EN FRANÇAIS	PROBABILITÉ
A	Tirer un as.	
C	Tirer un cœur.	
$\bar{C}$		
$A \cap C$		
$A \cup C$		
	Tirer un as mais pas un cœur.	
	Tirer un as ou une carte qui n'est pas un cœur.	
	Ne tirer ni un as ni un cœur.	

Travail individuel très bref pour les trois premières lignes, puis **plénière**. Le jeu de cartes est projeté au tableau.

Travail à la maison pour finir, puis **en équipes**, puis **plénière**. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons les parties VI et VII du résumé Probabilités.

EXERCICE DES ORDINATEURS DÉFECTUEUX

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ces ordinateurs peuvent présenter un défaut d'écran ou un défaut de batterie.
Une étude statistique sur un grand nombre de ces ordinateurs montre que 0,3 % des ordinateurs présentent les deux défauts à la fois ; 5,3 % des ordinateurs présentent un défaut d'écran ; 4,5 % des ordinateurs présentent un défaut de batterie.

On choisit au hasard un ordinateur.
1. Quelle est la probabilité que l'ordinateur ne présente pas de défaut d'écran ?
2. Quelle est la probabilité que l'ordinateur présente au moins un des deux défauts ?
3. (Question pour les rapides) On a vu une formule concernant $P(A \cup B)$. Trouvez une formule similaire pour trois événements A, B et C : $P(A \cup B \cup C) = \ldots$ (il est conseillé de faire un schéma).

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Des élèves font comme si « présenter un défaut d'écran » signifiait « présenter seulement un défaut d'écran ». Cette erreur est travaillée collectivement. Une fois l'exercice résolu, nous demandons aux élèves d'écrire les résultats en termes de probabilités faisant intervenir les événements E et B (voir ci-dessous).

On considère les événements « E : l'ordinateur a un défaut d'écran » et « B : l'ordinateur a un défaut de batterie ».

1. $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}053 = 0{,}947$
2. $P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) = 0{,}053 + 0{,}045 - 0{,}003 = 0{,}095$

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Application de la formule (connaissant trois termes, en déduire le quatrième), par exemple : « Parmi les élèves qui sont venus à la cantine aujourd'hui, 94 % ont pris un dessert et 67 % ont pris du fromage. Tous les élèves ont mangé au moins un dessert ou du fromage. On choisit au hasard un élève. Quelle est la probabilité qu'il ait pris un fromage et un dessert ? »

GÉOMÉTRIE

Géométrie dessinée et géométrie abstraite

Depuis 2016, les termes « géométrie dessinée » et « géométrie abstraite » sont officiels. Ils figurent dans le document ressources de cycle 4 « Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer[5] », document qui renvoie vers l'article « Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera "dessinée" et une qu'on appellera "abstraite"[6] » que les personnes peu familières avec ces questions peuvent consulter et qui commence ainsi : « La difficulté du travail géométrique avec des élèves de collège-lycée n'est pas nouvelle, notamment à cause des malentendus fréquents entre élèves et enseignants sur cette question. Ce texte pointe une source de malentendus : l'existence simultanée et imbriquée de "deux géométries" dans la géométrie plane et des pistes de travail pour résoudre ces malentendus. »

La différence essentielle entre les géométries dessinée et abstraite tient à la nature des objets étudiés : traces graphiques pour la première *versus* objets théoriques, abstraits, immatériels pour la seconde. La figure est l'objet de l'étude en géométrie dessinée alors qu'elle n'est plus qu'une représentation graphique d'objets abstraits en géométrie abstraite. Le problème de la nature des objets étudiés ainsi que ses conséquences est une question philosophique et est parfois difficile à intégrer pour nous professeurs de mathématiques. Pourtant, les enjeux sont importants car c'est bien cette différence de nature qui détermine les moyens autorisés pour obtenir un résultat : voir ou mesurer sur une figure suffit en géométrie dessinée, alors que la production d'un texte de démonstration citant des propriétés est nécessaire en géométrie abstraite.

Dire explicitement aux élèves qu'il y a deux géométries clarifie les choses, donne du sens et les aide à comprendre la nécessité des démonstrations dans un cadre abstrait. Mais encore peu d'élèves ont entendu parler de ces deux géométries avant d'arriver en seconde car cette évolution de l'enseignement de la géométrie plane est assez récente. En conséquence, très tôt dans l'année, dès le deuxième exercice de géométrie (voir p. 106), nous menons ce travail d'explicitation. Ensuite, le contrat didactique avec les élèves est le suivant : les exercices de géométrie effectués dans l'année seront des exercices de géométrie abstraite, sauf si le travail demandé concerne explicitement un dessin ou s'il s'agit d'un problème pouvant être modélisé par un dessin.

Dans le document ressources de cycle 4 cité plus haut, il est recommandé de ne s'orienter que progressivement vers la géométrie abstraite. Voir et mesurer permet en effet une appropriation perceptive et intuitive de la notion, préalable important aux raisonnements de géométrie abstraite. Nous reprenons à notre compte cette stratégie d'enseignement en commençant le travail sur une nouvelle notion géométrique par de la géométrie dessinée, autant que possible. C'est le cas, par exemple, pour les notions de coefficient directeur (voir p. 135), de vecteur, de projeté orthogonal (voir p. 105). Dans le même esprit, un exercice de géométrie abstraite donne souvent lieu à l'élaboration d'une conjecture à partir d'une figure, cette élaboration s'apparentant à un travail de géométrie dessinée. En faisant durer un peu ce travail de conjectures, comme lors de l'élaboration de la formule

5 Aller sur le site eduscol.education.fr > Contenus et pratiques d'enseignement > École élémentaire et collège > Cycle 4 > Mathématiques > Descendre dans la page jusqu'aux « Ressources thématiques », puis cliquer sur « Géométrie plane ».

6 irem.sciences.univ-nantes.fr/archives/geometriePlane/geometriesDessineeAbstraite.pdf

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (voir p. 127), nous permettons aux élèves de donner davantage de sens à ce qu'ils font.

Assez vite, les élèves font bien la distinction entre les deux géométries. Nous nous appuyons là-dessus pour introduire la notion de fonctions théoriques (voir p. 238), qui est en quelque sorte aux fonctions pratiques ce que la géométrie abstraite est à la géométrie dessinée. Car, pour les fonctions aussi, nous commencerons par le pratique avant d'aborder le théorique.

SÉQUENCE 5

Problèmes de géométrie (G1)

Au cycle 4, la racine carrée a été introduite en lien avec des problèmes géométriques. Le théorème de Pythagore et sa réciproque ont été étudiés. Les lignes trigonométriques dans le triangle rectangle ont été utilisées pour calculer des longueurs ou des angles. Les élèves ont découvert l'exercice de la démonstration. La notion de distance d'un point à une droite a été étudiée en sixième.

PROGRAMME 2019

Géométrie

– Projeté orthogonal d'un point sur une droite.
– Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
– Traiter de problèmes d'optimisation.
– Démonstrations : le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M ; relation trigonométrique $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ dans un triangle rectangle.

Nombres et calculs

– Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier.
– […] ils apprennent qu'il existe des nombres irrationnels, les encadrent par des nombres décimaux ou rationnels.
– Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π.
– Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
– Règles de calcul […] sur les racines carrées.
– Sur des cas simples de relations entre variables ([…] $S = \pi r^2$ […]), exprimer une variable en fonction des autres.
– Exemple d'algorithme : déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.
– Démonstrations : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Vocabulaire ensembliste et logique

Les élèves apprennent en situation à :
– reconnaître ce qu'est une proposition mathématique […] ;
– formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
– formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
– formuler la réciproque d'une implication.
Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements […] par l'absurde.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

L'étape 2 incluant un travail sur le Club des expressions (http://expressions.club), nous ne la commençons qu'après avoir fini l'étape 2 de CL1 au cours de laquelle le Club est introduit. Nous entrelaçons donc cette séquence avec la séquence CL1 et proposons l'ordre suivant : étape 1 de G1 (p. 105-112) ; étapes 1, 2, 3 (et éventuellement 4) de CL1 (p. 153-163) ; étapes 2, 3, 4 de G1 (p. 112-120).

– **Étape 1** : L'exercice des trois villes permet de réactiver les connaissances sur la médiatrice et d'introduire la notion de projeté orthogonal d'un point sur une droite. L'exercice des deux projetés orthogonaux permet, entre autres, de revenir sur les géométries abstraite et dessinée, en général mal assimilées, et de faire une démonstration complexe en géométrie abstraite. Ensuite, on démontre que le projeté orthogonal d'un point M sur une droite est le point de la droite le plus proche de M. Puis l'exercice du quadrilatère abstrait permet de travailler sur les propriétés des quadrilatères et sur la logique : implication, réciproque, raisonnement par l'absurde. On termine par un entraînement sur la réciproque d'une propriété, en incluant des propriétés liées aux multiples, diviseurs et nombres premiers.
– **Étape 2** : Le travail sur le périmètre et l'aire du carré permet de réactiver la notion de racine carrée, puis d'introduire les équations de la forme $x^2 = a$ (pas de résolution pour le moment). C'est aussi l'occasion de démontrer que : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et de travailler un premier algorithme : l'encadrement de $\sqrt{2}$ par balayage. La manipulation de deux grandeurs dont l'une dépend de l'autre prépare le calcul littéral et les fonctions.
– **Étape 3** : Travail sur le périmètre et l'aire du disque, ce qui prépare aussi le calcul littéral et les fonctions.
– **Étape 4** : Travail sur le théorème de Pythagore (sens direct seulement) et la distinction entre implication et équivalence. Démonstrations de $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

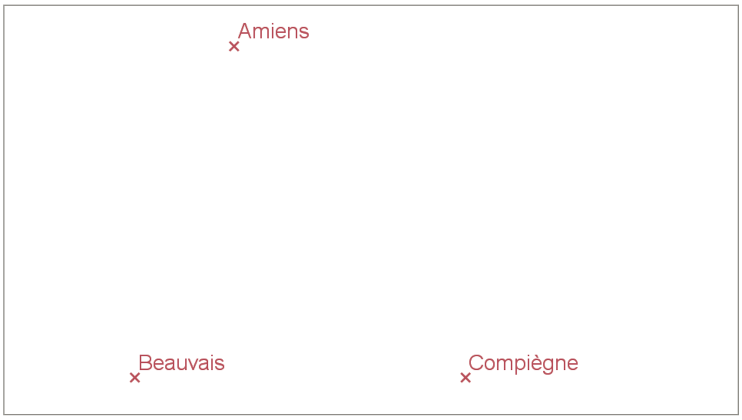
ÉTAPE 1

Projeté orthogonal d'un point sur une droite, géométries dessinée et abstraite

Phase de prise en main de notions de géométrie plane du collège | Phase d'élaboration de la notion de projeté orthogonal | ⏱ 4 heures

EXERCICE DES TROIS VILLES

M. et Mme Dupont travaillent à Compiègne. Leur fille habite à Amiens et leur fils à Beauvais. M. et Mme Dupont souhaitent déménager pour habiter à égale distance d'Amiens et de Beauvais, mais aussi le plus près possible de Compiègne. Indiquez sur le plan ci-après où ils peuvent essayer de s'installer.



Nous prévenons les élèves qu'ils peuvent utiliser le matériel de géométrie mis à disposition : équerres, rapporteurs photocopiés sur transparent, compas.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour réactiver le fait que les points à égale distance de A et B (les villes sont notées A, B, C) sont les points de la médiatrice du segment $[AB]$ et que cette médiatrice est la perpendiculaire au segment passant par son milieu.

Travail en équipes, puis plénière. Quelques constructions sont projetées et commentées par leurs auteurs. Les propriétés de la médiatrice sont rappelées oralement par des élèves, puis répétées par d'autres.

Il émerge que le point de la médiatrice (d) le plus proche de C est le point P de (d) tel que (CP) soit perpendiculaire à (d). Cette propriété a été vue en 6ᵉ. Nous n'évoquons pas encore sa démonstration car cet exercice relève de la géométrie dessinée et les élèves ne verraient pas l'intérêt d'une démonstration pour quelque chose qui est de l'ordre de l'évidence.

Nous distribuons le résumé Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Les élèves écrivent le titre de la séquence. Chacun complète sa figure et code les deux angles droits.

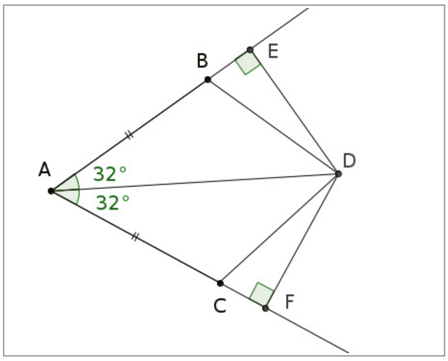
Soit (d) la médiatrice du segment $[AB]$.
Les points à égale distance de A et B sont les points de (d).
Le point de (d) le plus proche de C est le point P.
Donc M. et Mme Dupont peuvent essayer de s'installer près du point P.
On dit que P est le projeté orthogonal de C sur la droite (d).

EXERCICE DES DEUX PROJETÉS ORTHOGONAUX

ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 64°$ et $AB = AC = 4$ cm.
D est le point tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 32°$ et $AD = 6$ cm.
Soit E le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).
Soit F le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC).

1. Faites une figure en vraie grandeur. ← à commencer
2. Les diagonales du quadrilatère $AEDF$ sont-elles perpendiculaires ?

Pour information, voici une figure et trois plans de démonstrations possibles.
- **Plan n° 1** : $DE = DF = 6$ cm $\times \sin 32°$ et $AE = AF = 6$ cm $\times \cos 32°$.
  A et D sont sur la médiatrice de $[EF]$.
- **Plan n° 2** : Les triangles ADE et ADF sont semblables, et comme ils ont la longueur AD en commun, on a aussi $AE = AF$ et $DE = DF$.
  A et D sont sur la médiatrice de $[EF]$.
- **Plan n° 3** : $AE = AF = 6$ cm $\times \cos 32°$. Le symétrique de $[AE]$ par rapport à (AD) est $[AF]$. F est le symétrique de E par rapport à (AD).



Travail personnel avec entraide. La figure est faite directement sur le cahier de bord. Nous attendons que tous les élèves aient une figure correcte avant de déclencher la plénière.

Plénière de régulation. Nous avons au préalable repéré un élève qui pense qu'il suffit de constater la perpendicularité des diagonales sur la figure. Il expose sa construction sous la caméra, puis annonce la perpendicularité des diagonales. Nous demandons qui est d'accord : beaucoup acquiescent. Nous lançons alors un débat : « Non, votre camarade n'a pas démontré que les diagonales sont perpendiculaires. » Des élèves disent qu'il faut une démonstration, des calculs, qu'il faut utiliser des propriétés mais ils ne savent pas pourquoi. En précisant que nous allons leur révéler un des secrets de la géométrie, en théâtralisant pour que cela marque les élèves, nous disons : « Vérifier avec l'équerre ne suffit pas car la question posée ne concerne pas le quadrilatère *AEDF* que vous avez dessiné sur votre cahier, la question concerne autre chose… » Après quelques discussions, il émerge qu'il s'agit de savoir si les diagonales d'un *quadrilatère abstrait* sont perpendiculaires !

Nous revenons alors sur les deux géométries[7] vues au collège : « En géométrie abstraite, les objets sont abstraits. On peut les représenter par une figure, mais cette figure ne suffit pas à obtenir de nouvelles propriétés ; il faut faire un raisonnement en utilisant des propriétés connues, etc. » Nous parlons également de la notion de figure : « Comme nous faisons de la géométrie abstraite, le dessin sur le cahier n'est qu'une figure qui représente des segments et des angles abstraits (*figurer* peut signifier *représenter*). »

Nous convenons avec les élèves que, sauf mention contraire et sauf s'il est clair que l'objet étudié est un dessin comme dans l'exercice des trois villes, les exercices de géométrie du lycée seront des exercices de géométrie abstraite. Nous distribuons le résumé Les deux géométries planes.

Attention : il ne suffit pas de vérifier avec l'équerre que [*AD*] et [*EF*] sont perpendiculaires. Il s'agit d'un exercice de géométrie abstraite et il faut faire une démonstration en utilisant des propriétés.

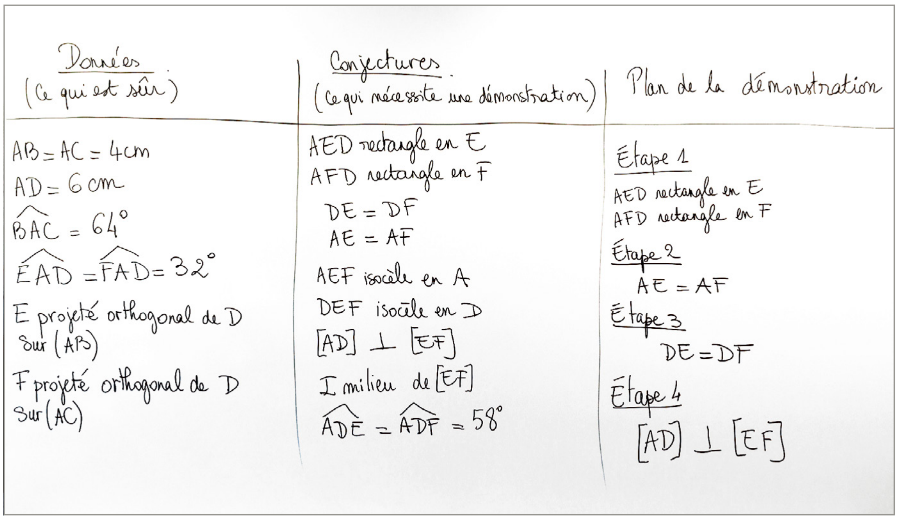
Nous disons : « Pour trouver une démonstration, il est bon de commencer par observer la figure et de lister tout ce qui semble vrai. Cela peut concerner les longueurs, les angles, les polygones, etc. »

Travail individuel pour lister tout ce qui semble vrai d'après la figure, puis **plénière**. Une figure est projetée au tableau sur lequel les propositions des élèves sont écrites. Celles qui emportent l'adhésion de la classe sont séparées en deux groupes : les données et les conjectures. Nous expliquons la différence : « On est certain qu'une donnée est vraie car elle est écrite dans l'énoncé. En revanche, une conjecture peut sembler vraie mais être fausse, et si elle est vraie, il faut la démontrer. »

Nous annonçons que le plan de la démonstration va se faire en plusieurs étapes. Nous demandons aux élèves de quels moyens ils disposent pour démontrer que deux segments sont perpendiculaires. Les propositions concernant les carrés, les rectangles ou le théorème de Pythagore sont rejetées, puis émerge l'idée d'utiliser les propriétés des médiatrices : on commence par essayer de démontrer que *A* et *D* sont sur la médiatrice du segment [*EF*]. Les élèves font ensuite des propositions pour la première étape de la démonstration (**travail individuel très bref**). Sans entrer dans les détails, nous invalidons ce qui

7 Voir http://www.irem.sciences.univ-nantes.fr/archives/geometriePlane/geometriesDessineeAbstraite.pdf ainsi que le document d'accompagnement du cycle 4 sur la géométrie.

est trop compliqué pour faire l'objet d'une première étape et validons ce qui convient. Nous la notons au tableau, puis passons au choix de la seconde étape, etc. Voilà à quoi pourrait ressembler le tableau (I désigne le point d'intersection des diagonales) :

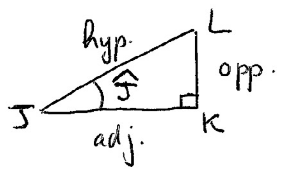


Données (ce qui est sûr)	Conjectures (ce qui nécessite une démonstration)	Plan de la démonstration
$AB = AC = 4$ cm $AD = 6$ cm $\widehat{BAC} = 64°$ $\widehat{EAD} = \widehat{FAD} = 32°$ E projeté orthogonal de D sur (AB) F projeté orthogonal de D sur (AC)	AED rectangle en E AFD rectangle en F $DE = DF$ $AE = AF$ AEF isocèle en A DEF isocèle en D $[AD] \perp [EF]$ I milieu de $[EF]$ $\widehat{ADE} = \widehat{ADF} = 58°$	Étape 1 AED rectangle en E AFD rectangle en F Étape 2 $AE = AF$ Étape 3 $DE = DF$ Étape 4 $[AD] \perp [EF]$

© Laetitia Valade

Une photographie du tableau est collée lors de la séance suivante.

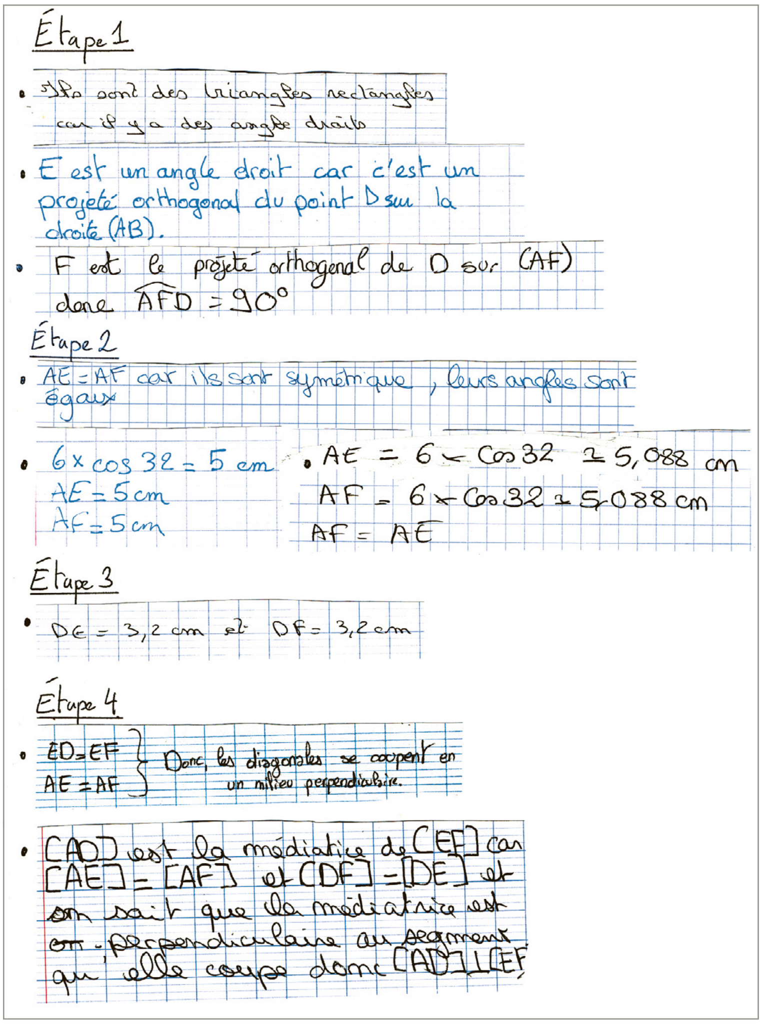
Travail individuel pour écrire une démonstration de chacune des étapes, entrecoupé par une **plénière de régulation** pour faire émerger l'idée d'utiliser la trigonométrie pour la deuxième étape. Nous disons : « Vous voulez démontrer quelque chose sur les longueurs AE et AF, et vous connaissez des mesures d'angles. Comment calculer des longueurs connaissant des angles ? ». Les élèves essayent de se souvenir de ce qu'ils ont vu au collège, et nous notons au fur et à mesure au tableau ce qui permet de calculer une longueur (voir ci-dessous).



$$KL = JL \times \sin \widehat{J}$$
$$JK = JL \times \cos \widehat{J}$$
$$JL = \frac{KL}{\sin \widehat{J}} = \frac{JK}{\cos \widehat{J}}$$

Travail en équipes pour écrire une démonstration commune. Nous aidons les équipes à aller au bout de leur raisonnement, sans les influencer. Par exemple, même si cela n'est pas utile ici, nous aidons certains à calculer un cosinus à la calculatrice.

Nous ramassons les productions et en sélectionnons des extraits où les élèves font encore, en partie au moins, de la géométrie dessinée et d'autres où les élèves raisonnent en utilisant des propriétés. Les extraits sont regroupés dans un document tel que celui-ci distribué lors de la séance suivante.



Étape 1

- Ils sont des triangles rectangles car il y a des angles droits
- E est un angle droit car c'est un projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).
- F est le projeté orthogonal de D sur (AF) donc $\widehat{AFD} = 90°$

Étape 2

- AE = AF car ils sont symétrique, leurs angles sont égaux
- $6 \times \cos 32 = 5$ cm
  AE = 5 cm
  AF = 5 cm
- AE = $6 \times \cos 32 \simeq 5{,}088$ cm
  AF = $6 \times \cos 32 \simeq 5{,}088$ cm
  AF = AE

Étape 3

- DE = 3,2 cm et DF = 3,2 cm

Étape 4

- ED = EF, AE = AF } Donc, les diagonales se coupent en un milieu perpendiculaire.
- [AD] est la médiatrice de [EF] car [AE] = [AF] et [DF] = [DE] et on sait que la médiatrice est perpendiculaire au segment qu'elle coupe donc [AD] ⊥ [EF]

Plénière. Une figure est dessinée au tableau pour aider à suivre les démonstrations. Les extraits de productions sont étudiés un à un. Les conclusions obtenues par la classe sont notées au fur et à mesure sur le document.

– Étape 1 : Le premier extrait permet de rediscuter des deux géométries.
– Étape 2 : Dans le premier extrait, le fait que les segments soient symétriques n'est pas justifié par une propriété… Le deuxième extrait permet de rappeler qu'en géométrie abstraite, on doit raisonner avec des longueurs exactes. Nous demandons quelles sont les longueurs exactes des segments $[AE]$ et $[AF]$ (**travail individuel très bref**). Le troisième extrait est l'occasion de parler du réglage des unités d'angle sur les calculatrices de lycée.
– Étape 3 : Une fois établi qu'une mesure prise sur une figure ne suffit pas en géométrie abstraite, nous demandons les valeurs exactes de DE et DF (**travail individuel très bref**). Ces valeurs exactes sont écrites dans l'espace vide.
– Étape 4 : Ceux qui ont rédigé le premier extrait ont bien compris qu'il fallait utiliser les étapes précédentes mais rien n'est justifié.

Le document regroupant des extraits de productions annotés est collé.
En utilisant la trigonométrie et les propriétés des médiatrices, on a démontré que les diagonales $[AD]$ et $[EF]$ sont perpendiculaires.

PROJETÉ ORTHOGONAL ET DISTANCE MINIMALE

Plénière de démonstration. Soit une droite (d) et un point M qui n'est pas sur (d). On note P le projeté orthogonal de M *sur* (d).
Nous allons démontrer que P est le point de (d) le plus proche de M. Pour cela, nous allons démontrer que les autres points de (d) sont strictement plus éloignés. Soit donc Q un point de la droite (d) différent de P. Nous voulons démontrer que $MQ > MP$.

Nous faisons une figure.
Question : Quelle est la nature du triangle MPQ ?
Question : Quelle égalité est donnée par le théorème de Pythagore ?
Le théorème de Pythagore sera retravaillé dans l'étape 3. Ici, on se contente de l'appliquer.
Question : En déduire que $MQ^2 > MP^2$.
On a donc bien $MQ > MP$ car ce sont des nombres positifs ou nuls. CQFD

La démonstration Projeté orthogonal et distance minimale est collée dans le cahier de résumés.

EXERCICE DU QUADRILATÈRE ABSTRAIT

ACO est un triangle tel que $\widehat{OAC} = 36°$ et $\widehat{OCA} = 35°$.
Le point B est le point de la droite (OC) tel que O soit le milieu du segment $[BC]$.
Le point A' est le symétrique du point A par rapport au point O.

1. Faites une figure.
2. Le quadrilatère $ABA'C$ est-il un parallélogramme ?
3. Le quadrilatère $ABA'C$ est-il un rectangle ?

Travail individuel pour les questions 1 et 2. La consigne autorise à faire une figure à main levée. Cette figure est faite directement sur le cahier de bord. Nous aidons les élèves qui ont des difficultés. Assez vite, nous glissons une **plénière de régulation** pour reparler de symétries et projeter Symétrie_axiale_et_cocottes.ggb et Symétrie_centrale_et_cocottes.ggb. Éventuellement, nous rappelons que si on n'arrive pas à faire une construction, un croquis codé à main levée peut aider. Si beaucoup d'élèves ne démarrent pas car l'énoncé ne donne pas de longueurs, la généralité de l'exercice est mise en avant et un élève dit que la longueur AC, par exemple, peut être choisie comme on veut.

Travail en équipes pour écrire une démonstration collective pour la question 2.

Plénière. Les productions sont étudiées (voir deux exemples plus bas). La nécessité de faire un raisonnement est interrogée, puis validée : c'est un exercice de géométrie abstraite ! Au cours du débat, nous demandons aux élèves de choisir quelle propriété utiliser : « Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu » ou bien « Si les diagonales d'un quadrilatère se croisent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. » Puis nous faisons un travail rapide sur la distinction entre une propriété et sa réciproque (voir le résumé Logique).

Nous discutons également de la définition d'un parallélogramme. Il est possible, au collège, que la définition « quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles » ait été donnée, mais comme elle ne correspond pas à la propriété classique « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme », nous proposons « quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles et de même longueur ».

Le quadrilatère ABA'C est un parallélogramme, car les diagonales d'un parallélogramme se croisent en leur milieu et l'on c'est que O est le milieu de [AA'] et que CO = OB donc O est le milieu de [BC].

b) A' est le symétrique de A par rapport à O donc
O est le milieu du segment AA'.
O est également le milieu de [BC].
Donc les diagonales du quadrilatère ABA'C se coupent en leur milieu.
Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
ABA'C est un parallélogramme.

Une ou deux productions sont photocopiées, collées et éventuellement annotées en classe.

Travail individuel pour la question 3, puis en équipes, puis plénière. Deux démonstrations sont possibles : raisonner par l'absurde ou utiliser les contraposées de deux des quatre propriétés ci-dessous. Des équipes prennent la parole. Notre objectif est que tous les élèves se soient suffisamment approprié une ou deux démonstrations pour qu'ils soient en mesure d'en rédiger une version correcte à la maison.

Lors de l'étude de certaines productions, nous demandons aux élèves de choisir, parmi les propriétés suivantes, celles à utiliser.
– Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur et se croisent en leur milieu.
– Si les diagonales d'un quadrilatère ont la même longueur et le même milieu, alors le quadrilatère est un rectangle.
– Si un triangle PQR est isocèle en P, alors les angles $\hat{Q}$ et $\hat{R}$ ont la même mesure.
– Si les angles $\hat{Q}$ et $\hat{R}$ d'un triangle PQR ont la même mesure, alors le triangle est isocèle en P.
Nous employons l'expression *raisonnement par l'absurde*, vue au collège.

En fin de plénière, en prévision du travail à la maison qui suit, nous demandons à quelques élèves de réexpliquer devant toute la classe les grandes lignes d'une démonstration. Nous commençons par des élèves à l'aise et terminons par des élèves fragiles ; ces derniers verront ainsi leur tâche facilitée. Nous encourageons les élèves à prendre quelques notes sur leur cahier de recherche en vue du travail à la maison.

Travail à la maison relevé : rédiger individuellement sur une feuille la réponse à la question 3 en citant les propriétés utilisées. Nous sélectionnons deux productions intéressantes, dont au moins une avec un raisonnement par l'absurde (voir deux exemples plus bas) et en gardons une photocopie. Nous annotons rapidement toutes les productions.

Plénière. Les deux productions sélectionnées sont projetées et discutées, l'une après l'autre. Ensuite, chacun récupère son propre travail annoté, puis lit nos commentaires.

Chacun colle son propre travail annoté, puis une des deux productions sélectionnées, éventuellement annotée.

c) Dans le triangle OAC on sait que les angles à la base ne sont pas égaux 36 ≠ 35° donc ce n'est pas un triangle isocèle alors [OA] ≠ [OC] et par symétrie [BO] ≠ [A'O]. Donc d'après la propriété suivante : "Si les digonales sont égales alors c'est un rectangle" Ce n'est donc pas un rectangle.

c) Je sais que dans un rectangle les diagonales sont de même longueur,
Donc les triangles ACO, CA'O, A'BO et BAO devraient être isocèles en O.
Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.
Donc le parallélogramme ABA'C n'est pas rectangle.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons les résumés Parallélogrammes et Cosinus, sinus et tangente d'un angle, ainsi que les parties I (Raisonnement par l'absurde), II (Implication) et III (Réciproque d'une implication) du résumé Logique.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Une propriété – c'est-à-dire une proposition vraie – est projetée et suivie de la consigne.

1. Énoncez la réciproque de cette propriété.
2. Cette réciproque est-elle vraie ?

Comme propriété géométrique, on peut prendre « Si $ABCD$ est un losange, alors $[AC]$ est perpendiculaire à $[BD]$ » ou bien « Si les diagonales d'un quadrilatère se croisent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme » ou encore « Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur », etc. Nous prenons également des propriétés arithmétiques telles que « Si un nombre entier est un multiple de 10, alors il est pair » ou bien « Si un nombre entier strictement positif a exactement deux diviseurs, alors c'est un nombre premier. »

ÉTAPE 2

Périmètre et aire du carré, racine carrée

Phase de prise en main de notions du collège | 2 heures

EXERCICE Nº 1 SUR LE PÉRIMÈTRE ET L'AIRE D'UN CARRÉ (PROJETÉ)

1. Le périmètre d'un carré est de 100 cm. Quel est son côté ?
2. L'aire d'un carré est de 144 cm². Quel est son côté ?
3. L'aire d'un rectangle est de 12 cm². Quelle est sa longueur ?
4. L'aire d'un carré est de 6,25 cm². Quel est son côté ?
5. L'aire d'un carré est de 2 cm². Quel est son côté ?

Les questions 1 à 4 sont projetées une par une (diapositives 1 à 8 du diaporama où figurent aussi les réponses). Les élèves ne doivent pas utiliser leur calculatrice.

Travail individuel très bref, puis plénière pour chacune. Sur le diaporama figurent des images qui illustrent les réponses ; par exemple, pour la question 4, on voit des demi-carreaux et un quart de carreau. Pour les questions 2 et 4, des élèves proposent $\sqrt{144}$ cm et $\sqrt{6,25}$ cm, d'autres 12 cm et 2,5 cm. Le lien est fait rapidement et oralement seulement.

Recherche du côté d'un carré d'aire 2 cm²

La question 5 est projetée (diapositive 9). Un élève propose 1,4 cm. Pour vérifier si c'est vrai, les élèves calculent à la main $1,4^2$ (**travail individuel très bref**). Comme le résultat est différent de 2 et que l'on cherche une valeur exacte puisqu'il s'agit de géométrie abstraite, 1,4 ne convient pas. Les élèves proposent d'autres nombres décimaux, plus proches du nombre cherché ; en calculant magistralement le carré du nombre proposé à la main, nous montrons que cela ne convient toujours pas. Nous gardons une trace au tableau des différents essais et de leur invalidation.

Enfin, un élève propose $\sqrt{2}$ cm ! Nous demandons alors la définition de ce nombre (**travail individuel très bref**), puis projetons la diapositive 10 sur laquelle se trouve la définition de la racine carrée d'un nombre positif ou nul a ainsi que l'égalité $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. La réponse $\sqrt{2}$ cm est validée.

RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE POSITIF OU NUL

Au tableau se trouvent toujours les essais pour trouver le côté d'un carré d'aire 2 cm². Par exemple, si les derniers essais étaient 1,41 et 1,42, nous écrivons au tableau $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ puis demandons quel est le chiffre des millièmes de $\sqrt{2}$. Nous autorisons les élèves à utiliser leur calculatrice à l'exception de la touche racine carrée.

Travail individuel très bref, puis plénière. Une fois établi que le chiffre des millièmes est un 4, nous écrivons $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et demandons la décimale suivante (**travail individuel très bref**).

Nous expliquons enfin que la méthode utilisée est un *algorithme* appelé « encadrement par balayage », dont voici une description rigoureuse.
Étape 1 : Supposons que l'on connaisse les deux premières décimales de $\sqrt{2}$. On peut écrire $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
Étape 2 : 1,41 étant trop petit, on lui ajoute 0,001. On teste la somme 1,41 + 0,001 en calculant son carré : 1,999396.
Si le carré de la somme est encore inférieur à 2, on revient à l'étape 2 en remplaçant 1,41 par 1,411 et en calculant le carré de la nouvelle somme.
Si le carré est strictement supérieur à 2, nous avons terminé.
Ici, 1,415 était le premier nombre dont le carré était supérieur à 2. La troisième décimale est celle du nombre testé juste avant.

Pour illustrer ces résultats, nous projetons Racine_de_2.ggb et effectuons des zooms successifs.

Algorithmes : étymologie et histoire

Nous projetons un timbre à l'effigie d'Al-Khwârizmî ainsi qu'un de ses écrits (diapositive 11) et expliquons : « Le mot algorithme vient du nom d'un mathématicien perse du IXe siècle, Al-Khwârizmî. Il a su résoudre des équations avec des méthodes qu'il a décrites avec des mots et non avec des chiffres ou des lettres. Les premiers algorithmes sont donc bien plus anciens que l'invention des ordinateurs ou même des machines à calculer. » Dès que nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Algorithmes.

Nous demandons aux élèves de saisir $\sqrt{2}$ sur leur calculatrice, puis notons au tableau le résultat affiché (1,414213562). **Travail individuel très bref** pour déterminer s'il s'agit d'une valeur exacte de $\sqrt{2}$, puis **plénière**. Il émerge que comme le dernier chiffre de $(1{,}414213562)^2$ est un 4, on a $1{,}414213562 \neq \sqrt{2}$. Il se peut pourtant que 2 s'affiche à l'écran de certaines calculatrices ; nous expliquons alors que cette erreur est due à leurs limites de précision. Pour convaincre les récalcitrants, il serait toujours possible de montrer avec Python que $(1414213562)^2 = 1999999998944727844$. Nous ajoutons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et que nous le démontrerons quand nous serons un peu plus « savants » (dans la séquence CL3).

Le bilan est fait à l'aide du bilan G1 n° 1. Il contient ce qui vient d'être vu concernant le nombre $\sqrt{2}$.

Équation $x^2 = a$

Travail individuel très bref, puis plénière pour chacune des questions suivantes : quels sont les nombres dont le carré vaut 9 ? 2 ? – 16 ? 121 ? 10 ? Quels sont les nombres dont le carré vaut un nombre positif ou nul quelconque a ?

Les résultats sont admis. Pendant les plénières, au fur et à mesure, nous faisons le lien avec l'équation associée $x^2 = \ldots$ Des élèves qui ont saisi -4^2 sur leur calculatrice disent que le carré de -4 vaut -16. Nous demandons aux élèves de chercher dans leur cahier de résumés quelle convention la calculatrice applique.

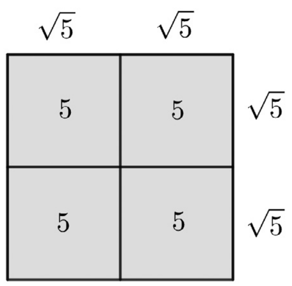
Règles de calcul sur les racines carrées

Nous demandons aux élèves de saisir $\sqrt{20}$ sur leur calculatrice : sur certaines, le résultat affiché est $2\sqrt{5}$.

Travail individuel pour déterminer si $2\sqrt{5}$ est une valeur exacte ou approchée de $\sqrt{20}$, entrecoupé par une **plénière de régulation** pour faire émerger l'idée de calculer le carré de $2\sqrt{5}$. Ceux qui ont fini résolvent l'équation $x^4 = 10\,000$.

Travail en équipes, puis plénière. Un élève détaille le calcul de $\left(2\sqrt{5}\right)^2$. Un autre en déduit le résultat mais nous signalons qu'il manque un argument. Le fait qu'il faut utiliser $2\sqrt{5} > 0$ émerge. Puis nous annonçons une démonstration géométrique de l'identité $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Plénière de démonstration. Nous dessinons au tableau la figure d'un carré d'aire 20, puis nous l'annoterons au fur et à mesure.
Un carré d'aire 20 est divisé en 4 carrés égaux.
Question : Quel est le côté des petits carrés ?
Question : Donnez deux expressions du côté grand carré.
L'aire du grand carré est 20 donc son côté est $\sqrt{20}$.
Le côté d'un petit carré est $\sqrt{5}$ donc le côté du grand carré est $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.
Donc $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.



IDENTITÉ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Nous montrons que $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ peut aussi s'écrire $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ puis annonçons que nous allons démontrer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous les nombres positifs ou nuls a et b.

Plénière de démonstration
Question : Simplifiez $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$
Question : Démontrez l'égalité $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
$\sqrt{a \times b}$ est l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut $a \times b$.
Or $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif ou nul et son carré vaut $a \times b$. Donc $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. CQFD.

La démonstration $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est collée dans le cahier de résumés.

Travail individuel pour démontrer $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ – ceux qui ont fini, font une démonstration géométrique – puis **plénière**. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Racine carrée d'un nombre positif ou nul.

Propriété

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous a et b positifs ou nuls.

Exemple

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
Les élèves recopient la figure du carré d'aire 20 restée au tableau.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous posons des questions du type : Quels sont les nombres dont le carré vaut 17 ? Quel est le côté d'un carré d'aire 1 000 ? Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 = 36$? Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 = -36$? $\sqrt{12}$ est-il égal à $2\sqrt{3}$? $\sqrt{9+16}$ est-il égal à $\sqrt{9}+\sqrt{16}$? Sans calculatrice, simplifiez $\sqrt{9 \times 16}$.

EXERCICE : SÉRIE G1-1 (CLUB DES EXPRESSIONS)

1. $\sqrt{a}$
2. $\sqrt{a^2}$
3. $2\sqrt{5}$
4. $\left(2\sqrt{5}\right)^2$
5. $\sqrt{9+16}$
6. $\sqrt{9}+\sqrt{16}$
7. $\sqrt{a-b}$
8. $\sqrt{ab}$
9. $\sqrt{a}\sqrt{b}$
10. $\sqrt{3^2+4^2}$
11. $\sqrt{5^2-3^2}$
12. $\sqrt{2+\sqrt{2+2}}$

Les élèves ont déjà fait deux séries dans la séquence CL1. La série G1-1 est à faire sur le site du Club des expressions en **travail à la maison** (pour la consigne, voir « Structure des expressions algébriques (Club des expressions) » p. 150), **puis plénière**. La série est faite à l'aide du vidéoprojecteur. Nous revenons sur certaines conventions d'écriture.

EXERCICE Nº 2 SUR LE PÉRIMÈTRE ET L'AIRE D'UN CARRÉ (PROJETÉ)

1. Exprimez le périmètre d'un carré en fonction de son côté.
2. Exprimez le côté d'un carré en fonction de son périmètre.
3. Exprimez l'aire d'un carré en fonction de son côté.
4. Exprimez le côté d'un carré en fonction de son aire.

Les questions sont projetées une à une. **Travail individuel très bref, puis plénière** pour chacune. Nous donnons d'abord la parole à des élèves qui donnent des formules avec des mots, par exemple « périmètre = côté × 4 ». Puis des formules littérales sont exhibées.

Le bilan est fait à l'aide du bilan G1 nº 2. Il contient les formules correspondant aux quatre questions précédentes.

ÉTAPE 3

Longueur d'un cercle, périmètre et aire du disque

Phase de prise en main de notions du collège | ⏱ 1 heure

EXERCICE DE LA CIRCONFÉRENCE DE LA TERRE

Ératosthène, savant grec du IIIe siècle avant notre ère, est un des premiers à estimer la circonférence de la Terre. Il suppose que la Terre est une sphère puis, par un raisonnement subtil, il estime que la longueur d'un cercle passant par le pôle Nord et le pôle Sud est de 250 000 stades. Le stade est une ancienne unité de longueur égale à 157,5 m (source : Wikipedia).

1. Convertissez en kilomètres la longueur calculée par Ératosthène.
2. Les moyens modernes nous permettent de savoir que la longueur estimée par Ératosthène est en réalité de 40 007,864 km.
Par rapport à 40 007,864 km, quel est le pourcentage d'erreur d'Ératosthène ?
3. Aujourd'hui, l'Union géodésique et géophysique internationale considère que le rayon moyen de la Terre est de 6 371,009 km.
Cette valeur est-elle compatible avec la longueur donnée à la question 2 ?
4. Quelle valeur du rayon terrestre Ératosthène aurait-il pu déduire de ses calculs ? Donnez la réponse en stade et en kilomètre.

Nous apportons un globe terrestre et de la ficelle en classe. Nous présentons Ératosthène, puis sa méthode, sans rentrer dans les détails, à l'aide du globe terrestre sur lequel nous montrons Alexandrie, Syène, les pôles, un méridien et l'équateur. En plus d'avoir permis de nombreuses avancées scientifiques, Ératosthène est appelé en Égypte vers 245 avant notre ère pour assurer l'éducation de Ptolémée IV, le fils du pharaon Ptolémée III. À partir de 221 avant notre ère, il devient directeur de la fameuse bibliothèque d'Alexandrie. Nous projetons une peinture représentant Ératosthène enseignant à Alexandrie, réalisée vers 1635 par Bernardo Strozzi (diapositive 12).

Travail individuel pour répondre aux quatre questions entrecoupé par une **plénière de régulation** pour faire émerger la méthode de calcul du pourcentage d'erreur.

Si besoin, nous glissons une seconde **plénière de régulation** pour rappeler la formule de la longueur d'un cercle. Ceux qui ont fini cherchent le temps qu'il faut pour faire le tour de la Terre à la vitesse de la lumière.

Travail en équipes, puis plénière. Nous utilisons le globe terrestre pour illustrer les discussions. Nous disons aux élèves, qu'en réalité, nous ne savons pas vraiment quelle circonférence de la Terre Ératosthène a obtenu car la longueur du stade qu'il utilise n'est pas connue. La valeur de 157,5 m a été obtenue en supposant que son calcul était très précis ! On ne peut donc absolument pas dire qu'Ératosthène a commis une erreur de 1 %. D'autre part, 250 000 est un chiffre rond ; la longueur de 250 000 stades est donc certainement arrondie, ce dont Ératosthène avait vraisemblablement conscience, mais on a souvent tendance à embellir ou déformer la réalité historique.

Enfin, nous demandons le rayon du globe. L'idée de mesurer sa circonférence émerge. Nous utilisons la ficelle pour mesurer la circonférence, annonçons le résultat, puis **travail individuel très bref** pour déterminer le rayon du globe.

(Sans rédiger)
1. 250 000 × 157,5 m = 39 375 000 m = 39 375 km
2. 40 007,864 – 39 375 = 632,864
Pourcentage d'erreur d'Ératosthène : $632{,}864 \div 4\,0007{,}864 \simeq 1{,}6$
3. $2 \times \pi \times 6\,371{,}009$ km $\simeq 40\,030$ km.
Ce résultat est différent de 40 007,864 km car la Terre n'est pas tout à fait sphérique ; elle est un peu aplatie aux pôles, comme une orange.
4. 250 000 stades $\div (2 \times \pi) \simeq 39\,789$ stades ou 39 375 km $\div (2 \times \pi) \simeq 6\,267$ km.
En réalité, ces résultats sont très incertains car la valeur du stade utilisée par Ératosthène nous est inconnue.

EXERCICE SUR LE PÉRIMÈTRE ET L'AIRE D'UN DISQUE (PROJETÉ)

1. Exprimez le périmètre d'un disque en fonction de son rayon.
2. Exprimez l'aire d'un disque en fonction de son rayon.
3. Exprimez le périmètre d'un disque en fonction de son diamètre.
4. Exprimez l'aire d'un disque en fonction de son diamètre.

Les questions sont projetées une à une. **Travail individuel très bref, puis plénière** pour chacune.

Questions 1 et 3. Les formules du périmètre d'un disque se déduisent de celles de la longueur d'un cercle.

Question 2. Une fois la formule rappelée, nous mettons une pièce de 2 € sous la caméra et demandons l'aire d'une face. Un élève vient sous la caméra mesurer le diamètre, puis **travail individuel très bref**. Nous demandons quelles sont les opérations à effectuer pour calculer πR^2 et dans quel ordre il faut les effectuer. La priorité de l'élévation à la puissance sur la multiplication est rappelée.
Nous demandons aux élèves comment ils font pour éviter de confondre $2\pi R$ et πR^2. Par exemple, on peut raisonner sur les unités : si R est exprimé en cm, alors $2\pi R$ aussi (π est « sans unité ») alors que πR^2 est en cm² qui est une unité d'aire et pas de longueur.

Question 4. L'erreur d'écriture $\pi \dfrac{D^2}{2}$ est travaillée. La priorité de l'élévation à la puissance sur la division est rappelée. Une fois la formule obtenue, nous mettons une pièce de 1 € sous la caméra, mesurons son diamètre et demandons l'aire d'une des faces (**travail individuel très bref**).

Sur la page « Formules de longueur, aire, volume » du cahier de résumés, les élèves écrivent les formules du périmètre et de l'aire du disque en fonction du rayon ainsi qu'une phrase qui aide à ne pas les confondre.

EXERCICE DES HUIT FORMULES SUR LE DISQUE

On considère un disque. On note R son rayon ; D son diamètre ; P son périmètre ; A son aire.
Complétez le tableau suivant à l'aide des formules demandées.

DESCRIPTION	FORMULE
Diamètre en fonction du rayon	
Rayon en fonction du diamètre	
Périmètre en fonction du rayon	
Périmètre en fonction du diamètre	
Rayon en fonction du périmètre	
Diamètre en fonction du périmètre	
Aire en fonction du rayon	
Aire en fonction du diamètre	

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Application des formules ci-dessus dans un cadre non abstrait, par exemple :

1. On dessine un disque. Son périmètre est … cm. Quel est son rayon ?
2. Une cible de fléchettes a la forme d'un disque de diamètre … . Quelle est son aire ?
3. Une roue de vélo a un périmètre de … . Quel est son diamètre ?
4. On dessine un disque de diamètre … cm. Quelle est son aire ?

ÉTAPE 4

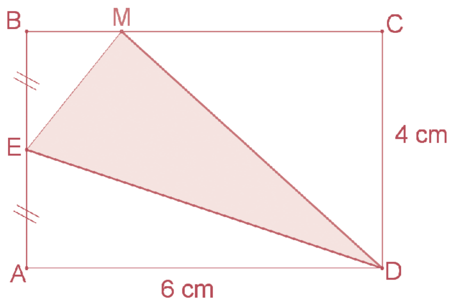
Théorème de Pythagore, implication, équivalence logique

Phase d'approfondissement du théorème de Pythagore et de l'utilisation d'expressions algébriques | Phase d'élaboration de la distinction entre équivalence logique et implication | ⏱ 1 h 30

EXERCICE DU POINT MYSTÈRE

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ cm et $BC = 6$ cm.
M est un point du segment $[BC]$.
E est le milieu du segment $[AB]$.

Est-il possible que le triangle EDM soit isocèle en D ?
Si oui, à quelle distance du point C le point M doit-il se trouver ? Sinon, pourquoi ?



Nous faisons attention à ce que sur l'énoncé donné aux élèves, les côtés du rectangle mesurent bien 4 cm et 6 cm. Ce n'est pas nécessaire puisqu'il s'agit de géométrie abstraite, mais nous voulons que les élèves qui ont encore tendance à travailler en géométrie dessinée puissent le faire ouvertement.

L'énoncé est collé en tête d'une copie. Les élèves le lisent et posent des questions si besoin. Pour créer des images mentales, nous projetons le fichier Point_mystère.ggb, déplaçons le point M et faisons reformuler la question : « Les segments rouge et bleu peuvent-ils être de même longueur ? ».

Travail à la maison sur la copie. Nous relevons les copies et, dans la foulée, en sélectionnons quelques-unes comportant des raisonnements de géométrie dessinée.

Plénière. Les copies en question sont projetées et l'erreur est discutée. L'idée d'utiliser le théorème de Pythagore émerge. Nous rendons leur copie à ceux qui n'ont pas appliqué le théorème de Pythagore en leur demandant de refaire l'exercice en **travail à la maison**.

Plénière. Nous sélectionnons une ou deux copies permettant de travailler les deux erreurs décrites un peu plus bas, par exemple la copie ci-dessous, et nous la projetons.

$AE^2 = 2^2 = 4$
$AD^2 = 6^2 = 36$
$ED^2 = 4 + 36 = 40$
$ED = \sqrt{40} = 6{,}32$

Si DEM est isosèle alors DE est égale à DM qui est égale à 6,32 cm. Dans le triangle rectangle DCM rectangle en C, $MD^2 = CM^2 + CD^2$

$MD^2 = 6{,}32^2 = 39{,}94$
$CD^2 = 4^2 = 16$
$MC^2 = MD^2 - CD^2 = 39{,}94 - 16 = 23{,}94$
$MC = \sqrt{23{,}94} = 4{,}89$

Or le segment BC fait 6 cm et le segment CM mesure 4,89 donc le segment CM appartient bien au segment BC. Il est donc possible d'avoir un triangle isocèle DME. Le point M doit se trouver à 4,99 cm du point C.

En début de plénière, nous faisons porter les discussions sur le théorème de Pythagore. Puis nous travaillons sur l'erreur qui consiste à remplacer certains radicaux par leur valeur approchée. Nous finissons par l'erreur de logique qui consiste à se contenter d'affirmer : « Si le triangle est isocèle en D, alors $CM = \sqrt{24}$ cm ». Les expressions *il faut* et *il suffit* sont employées, ainsi que celle d'*équivalence logique*.

Nous entraînons les élèves en projetant une à une les phrases suivantes à compléter à l'aide de « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit » (**travail individuel très bref** pour chaque phrase).
– Pour que $ABCD$ soit un carré, ... que $AB = BC = CD = DA$.
– Pour que $AB = BC$, ... que le triangle ABC soit équilatéral.
– Pour que I soit le milieu de $[AB]$ .... que $AI = IB$.
– Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme .... que $[AC]$ et $[BD]$ aient le même milieu.

À chaque fois, nous faisons formuler sans « il faut », « il suffit » : avec « si … alors … » pour une implication par exemple ; avec « … si et seulement si … » pour une équivalence logique par exemple. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons la partie IV (Propositions équivalentes) du résumé Logique.

Photocopies d'une (ou deux) copie(s) d'élève(s) annotée(s), avec les deux erreurs ci-dessus. Les annotations comportent les expressions « il faut » et « il suffit », par exemple :

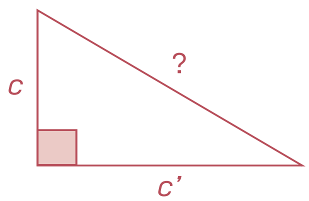
Stéphane a seulement démontré que si $DE = DM$, alors $CM = \sqrt{24}$ cm.
Autrement dit il a démontré que pour que $DE = DM$, il faut que $CM = \sqrt{24}$ cm. Mais il aurait aussi dû démontrer que si $CM = \sqrt{24}$ cm, alors $DE = DM$. Autrement dit il aurait dû démontrer que pour que $DE = DM$, il suffit que $CM = \sqrt{24}$ cm.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

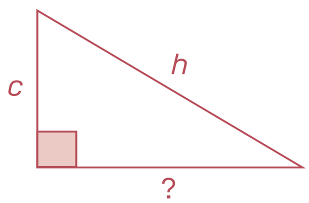
Nous proposons des phrases à compléter à l'aide de « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit ».
Les phrases concernent les polygones ou les notions de multiple, diviseur, nombre premier.
Exemple : « Pour qu'un nombre soit un multiple de 10, ... qu'il soit pair. »

EXERCICE DU CÔTÉ INCONNU (PROJETÉ)

1. Exprimez l'hypoténuse d'un triangle rectangle en fonction des deux côtés c et c' de l'angle droit.

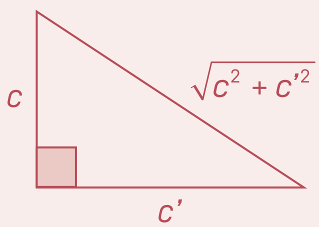


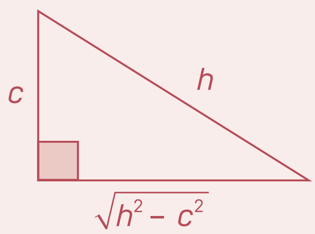
2. Exprimez un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle en fonction de son hypoténuse h et du deuxième côté c de l'angle droit.



Les deux questions sont projetées simultanément. **Travail individuel, puis en équipes**. Ceux qui ont fini cherchent l'aire d'un triangle équilatéral de périmètre 1 m. **Plénière.**

Calcul d'une longueur à l'aide du théorème de Pythagore



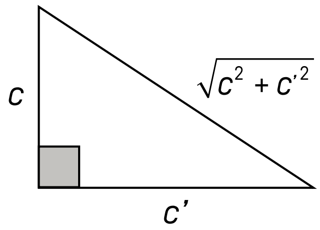


AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Calculs de longueurs dans des triangles rectangles, des rectangles ou des carrés : les élèves qui le peuvent essayent de calculer de tête. Les figures sont dessinées à main levée avec des indications de longueurs, par exemple « 5 ; 12 ; ? », ou bien les longueurs sont données sans dessin, par exemple « ABC est un triangle rectangle en B avec $AB = 5$ et $AC = 12$. Déterminez BC.

INÉGALITÉ $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Plénière de démonstration. Soit a et b deux nombres strictement positifs. On pose $c = \sqrt{a}$ et $c' = \sqrt{b}$.
On considère le triangle ci-contre.



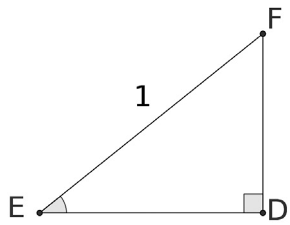
Question : Quelle est la longueur la plus grande : $c + c'$ ou $\sqrt{c^2 + c'^2}$?
L'inégalité triangulaire a été vue au cycle 4.

Question : Exprimez $c + c'$ et $\sqrt{c^2 + c'^2}$ en fonction de a et b.
On en déduit $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. CQFD

La démonstration $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ est collée dans le cahier de résumés.

ÉGALITÉ $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Exercice de la relation trigonométrique
On considère un triangle DEF rectangle en D tel que $EF = 1$.
1. Démontrez que $DE^2 + DF^2 = 1$.
2. Exprimez $\cos\hat{E}$ et $\sin\hat{E}$ en fonction de DE et DF.
3. Démontrez que $\left(\cos\hat{E}\right)^2 + \left(\sin\hat{E}\right)^2 = 1$



Travail à la maison sur feuille relevé, puis plénière. Quelques extraits de copies sont projetés et soumis à la critique. En fin de plénière, nous disons que l'angle $\hat{E}$ pouvant prendre n'importe quelle valeur entre 0° et 90°, nous avons démontré que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ pour tout angle aigu α. Nous rendons enfin les copies corrigées.

La démonstration $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ est collée dans le cahier de résumés.

SÉQUENCE 6

Géométrie plane repérée (G2)

Au cycle 4, les élèves ont utilisé le repérage dans le plan muni d'un repère orthogonal, ainsi que les mots « abscisse » et « ordonnée ».

PROGRAMME 2019

Géométrie

- L'un des objectifs de cette partie est de poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, [...] et géométrie [...]. En particulier, introduire la notion d'ensemble de points du plan décrit par une équation, en explicitant le cas des équations de droites.
- Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Les progrès apportés par la « méthode des coordonnées » de Descartes [...] permettent de relier efficacement géométrie [...] et calcul.

Vocabulaire ensembliste et logique

- Les élèves doivent connaître la notion d'élément d'un ensemble. Ils rencontrent également la notion de couple.
- Les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas.

Nombres et calculs

Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels. Relation $\sqrt{a^2}=|a|$.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Nous faisons cette séquence après la séquence CL1 (p. 152) car des techniques de calcul littéral sont utilisées pour l'exercice du trésor.

- **Étape 1** : Introduction d'un repère (orthonormé) pour résoudre un problème de géométrie. Coordonnées du milieu d'un segment.
- **Étape 2** : Distance entre deux points dont on connaît les coordonnées. Valeur absolue, distance entre deux nombres réels. Réciproque du théorème de Pythagore.
- **Étape 3** : Première approche de la notion d'ensemble, à travers l'étude d'ensembles de points. Première approche de la notion d'équation d'une droite, uniquement pour les droites parallèles aux axes et les bissectrices.

ÉTAPE 1

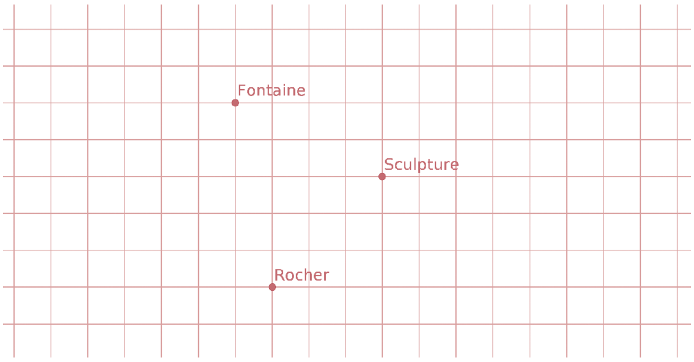
Repère orthonormé, coordonnées, coordonnées d'un milieu

Phase de prise en main des notions de repère et coordonnées | Phase d'élaboration de la notion de couple et des formules des coordonnées d'un milieu | ⏱ 4 heures

EXERCICE DU TRÉSOR

Un commerçant avait accumulé un trésor. À sa mort, il laisse le message et la carte ci-dessous. Malheureusement, le vieux chêne dont il est question disparaît en même temps que le commerçant, et depuis, tous ceux qui ont le message entre les mains pensent que le trésor est introuvable.
Et vous, trouverez-vous le trésor ?

Partez du vieux chêne, allez vers la fontaine et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le vieux chêne de la fontaine. Vous arrivez à un premier point.
Dirigez-vous alors vers la sculpture et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le premier point de la sculpture. Vous arrivez à un second point.
Allez alors vers le rocher en forme de pyramide et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le second point du rocher. Vous arrivez à un troisième point.
Le trésor est à mi-chemin entre le vieux chêne et le troisième point, à cinq pieds sous terre.



Remarques préliminaires

Pour résoudre ce problème, les élèves vont introduire un repère orthonormé et démontrer que les coordonnées du milieu du segment joignant les points de départ et d'arrivée ne dépendent pas des coordonnées du point de départ (il y a en effet une seule position possible pour le trésor, à savoir l'unique point T tel que $FSRT$ soit un parallélogramme). Ils passent ainsi en revue leurs connaissances en géométrie repérée (intérêt d'introduire un repère, notions d'abscisse, d'ordonnée, de coordonnées), apprennent à calculer les coordonnées du milieu d'un segment, ont une nouvelle occasion de constater l'intérêt du calcul littéral pour traiter un problème général et s'entraînent au calcul littéral.

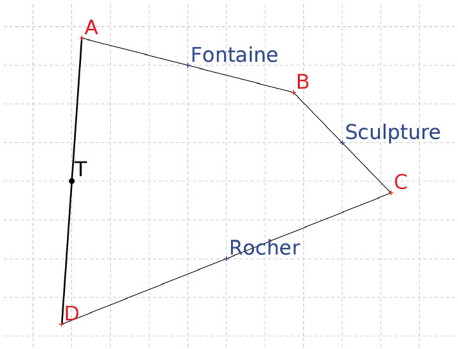
La question posée concernant une carte, il s'agit d'un exercice de géométrie dessinée, et le fait qu'on le résolve à l'aide du calcul littéral n'y change rien. Nous en dirons quelques mots quand un élève soulèvera la question ou bien lors du bilan final. Par ailleurs, les techniques et les résultats vus au passage sont valables dans les deux géométries.

Conjecture

Une fois l'énoncé lu, les élèves signalent ce qu'ils ne comprennent pas. Puis quelqu'un explique pourquoi on ne peut effectivement pas savoir a priori où est le trésor. Nous proposons néanmoins à chacun de faire un essai : « Choisissez une position du vieux chêne pas trop éloignée de la fontaine – pour éviter que les tracés ne sortent de la feuille –, puis placez les trois points et le trésor. »

Travail personnel avec entraide, puis plénière de régulation éventuelle pour faire émerger que les trois points sont des symétriques par rapport à la fontaine, la sculpture et le rocher. Chacun doit avoir un trajet correct sur son énoncé.

Plénière. Nous projetons des trajets correspondant à différentes positions du vieux chêne. La conjecture apparaît assez vite. Pour l'appuyer, nous projetons Trésor.ggb et déplaçons le point A : le point T reste bien à la même place.



Les élèves recopient la conjecture suivante et collent le bilan G2 n° 1 contenant les notations ci-dessous.

Conjecture

On pense que le milieu du segment qui joint le vieux chêne au troisième point est toujours le même, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la position du vieux chêne.

Notations

On note F, S et R les points représentant la fontaine, la sculpture et le rocher.
On appelle A le point où se trouve le vieux chêne. À partir de A, on définit :
– le point B, symétrique de A par rapport au point F ;
– le point C, symétrique de B par rapport au point S ;
– le point D, symétrique de C par rapport au point R ;
– le point T, milieu du segment $[AD]$.

Introduction d'un repère

Comment démontrer la conjecture ? Certains pensent que l'expérience faite avec GeoGebra est une démonstration, mais ce n'est pas tout à fait satisfaisant car on ne peut pas épuiser toutes les positions de A. Nous voulons mieux : une vraie démonstration mathématique ! Des idées de démonstrations géométriques sont données, et si elles sont intéressantes, nous disons qu'elles pourront être explorées plus tard par ceux qui auront fini.

Ensuite, si aucun élève ne propose d'introduire un repère et de raisonner sur les coordonnées, nous demandons comment nous avions fait pour décrire la position présumée du trésor. À partir de phrases telles que « 3 carreaux sous la fontaine et 3 carreaux à gauche », nous en arrivons à l'idée qu'un point se repère par deux nombres relatifs. Pour que nous puissions communiquer nos résultats, nous devons tous choisir le même repère. Nous décidons alors de prendre l'origine « 3 carreaux sous F » (ce qui permettra plus tard à certains de deviner l'abscisse de B, puisque avec ce choix d'origine elle est l'opposé de celle de A). Nous projetons enfin Trésor_avec_repère.ggb et faisons à nouveau varier le point A.

Les élèves écrivent le titre de la séquence.
Jérôme a eu l'idée d'introduire un repère et de raisonner sur les coordonnées.

Travail personnel avec entraide pour ajouter sur l'énoncé les axes ainsi que 0, 1 et 1, puis pour déterminer les coordonnées de F, S et R.

Plénière. Les élèves rappellent ce qu'ils ont vu au collège. Nous disons : « Les mathématiciennes et les mathématiciens donnent l'abscisse avant l'ordonnée. Ils résument cela à l'aide du *couple de coordonnées* d'un point. Un *couple* de nombres est constitué d'un premier nombre a et d'un deuxième b, l'ordre ayant de l'importance : un tel couple est noté $(a\ ;\ b)$. »

Nous projetons les diapositives 1 et 2 du diaporama illustrant les coordonnées de S et R. On y voit deux flèches bout à bout joignant l'origine au point considéré, les coordonnées étant alors les longueurs algébriques des deux flèches. C'est ainsi que procédaient les premiers utilisateurs des coordonnées. Ce premier « geste » nous semble plus facile à comprendre que le second où les deux coordonnées correspondent aux deux marques sur les axes, sans ordre privilégié[8]. Pour illustrer ce passage, nous projetons la diapositive 3 avec les deux gestes côte à côte, puis nous proposons le moyen mnémotechnique *tout est dans l'ordre alphabétique* : « abscisse » vient avant « ordonnée », « horizontal » vient avant « vertical » et « x » vient avant « y ».

Naissance d'un système de coordonnées et détails historiques sur Descartes

Nous disons que « l'abscisse et l'ordonnée d'un point s'appellent ses coordonnées *cartésiennes*. Savez-vous pourquoi ? ». Une fois le nom de Descartes prononcé, nous projetons son portrait trouvé sur internet (diapositive 4) et expliquons : « René Descartes est un célèbre mathématicien, physicien et philosophe français du XVIIe siècle. Il est l'auteur de la fameuse proposition "Je pense, donc je suis" que vous étudierez en terminale. » En amont, nous avons cherché sur internet des sites qui attribuent à Descartes l'invention de ce système de coordonnées et en faisons lire des extraits aux élèves. Nous concluons alors : « Beaucoup de choses nous laissent penser que Descartes est l'inventeur des coordonnées, mais ceci est très probablement faux[9] ! Nous savons aujourd'hui que Descartes n'a jamais utilisé de quadrillage et qu'associer de manière systématique deux nombres à un point est venu beaucoup plus tard. Il faut donc se méfier des idées reçues, notamment en histoire des mathématiques ! Notez quand même que Descartes a certainement contribué indirectement à l'invention des coordonnées en établissant un "pont" entre la géométrie et l'algèbre, entre les points et les nombres, mais seulement avec des raisonnements sur des longueurs, pas avec l'idée du repérage. Nous verrons cela plus tard cette année. » Nous terminons ce travail par un échange argumenté autour de la fiabilité des informations qui circulent sur internet.

Travail individuel, puis en équipes pour déterminer les coordonnées des différents points dans le cas $A(-3\ ;4)$, puis pour traduire la conjecture en termes de coordonnées. Nous distribuons à ceux qui en ont besoin un nouvel exemplaire du plan.

Ceux qui ont terminé réfléchissent à la démonstration générale. Les élèves tracent les trajets sur l'énoncé au crayon à papier (une fois fini, ils repassent un trajet en couleur) en nommant les points A, B, C, D et T.

On a fait un essai en plaçant le vieux chêne sur le point d'abscisse – 3 et d'ordonnée 4.
On obtient alors les couples de coordonnées suivants : $A(-3\ ;\ 4)$; $B(3\ ;\ 2)$; $C(5\ ;\ 0)$; $D(-3\ ;\ -4)$ et $T(-3\ ;\ 0)$.

Nouvelle conjecture

Pour n'importe quelles valeurs de x_A et y_A, on a $x_T = -3$ et $y_T = 0$.

8 Voir Jean-Marc Patin (dir.), *Les mathématiques ne se sont pas faites en un jour…*, Nantes, IREM des Pays de la Loire, 2007, p. 68.

9 Voir Michel Serfati, « "Pour Descartes" : mathématiques et physique cartésiennes », in *Revue d'histoire des sciences*, t. 51, nº 2-3, 1998, p. 176 (de « S'il n'y a en effet "aucun doute […] à « thème plutôt marginal »). En ligne : persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1998_num_51_2_1321.

Coordonnées d'un milieu, d'un symétrique par rapport à un point

Nous annonçons que pour résoudre l'exercice, nous aurons besoin de savoir calculer les coordonnées du symétrique d'un point par rapport à un autre, ainsi que les coordonnées du milieu d'un segment.

Nous écrivons au tableau l'énoncé suivant : « On considère les points $M(1\,;\,2)$ et $M'(5\,;\,3)$. Soit K le milieu de $[MM']$. Quelles sont les coordonnées de K ? ».

Nous projetons un fichier GeoGebra et y plaçons les points $M(1\,;\,2)$ et $M'(5\,;\,3)$.

Travail individuel très bref, puis plénière. Les élèves donnent la bonne réponse et nous demandons si ce résultat est démontré. Ce n'est pas le cas puisque, par défaut, nous faisons de la géométrie abstraite pour laquelle, comme dans toute théorie, les résultats doivent être démontrés à l'aide de propriétés déjà connues. Nous indiquons alors qu'il existe une formule permettant de trouver x_K en fonction de x_M et $x_{M'}$, et une autre pour y_K en fonction de y_M et $y_{M'}$.

Travail individuel, puis en équipes pour trouver les formules, puis **plénière.** Certains proposent $\frac{M+M'}{2}$. D'autres font le lien avec ce qui a été fait sur la moyenne de deux nombres (voir p. 162). Une fois les formules obtenues, les élèves vérifient qu'elles donnent bien les résultats conjecturés pour $M(1\,;\,2)$ et $M'(5\,;\,3)$ (**travail individuel très bref**). Nous concluons : « L'abscisse du milieu est la moyenne des abscisses, l'ordonnée du milieu est la moyenne des ordonnées. On pourrait le démontrer à l'aide du théorème de Thalès, mais nous ne le ferons pas, nous admettons que c'est vrai. » Nous entraînons enfin les élèves sur quelques exemples. Aucune trace n'est laissée pour le moment.

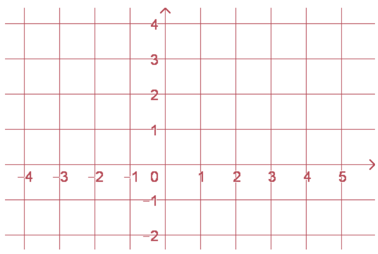
Nous écrivons au tableau l'exercice suivant : « On considère les points $M(2\,;\,3)$ et $K(4\,;\,1)$. Soit M' le symétrique de M par rapport à K. Quelles sont les coordonnées de M' ? ».

La mise en œuvre est similaire. La formule $x_{M'} = 2x_K - x_M$ est mise en relation avec ce qui a été fait dans l'étape 4 de CL1 autour de la formule $x' = 2m - x$.

Le bilan est fait à l'aide du bilan G2 n° 2 contenant les formules des coordonnées d'un milieu et celles du symétrique de M par rapport à K ($x_{M'} = 2x_K - x_M$ et $y_{M'} = 2y_K - y_M$). Nous distribuons un seul document contenant ce bilan suivi de l'exercice des deux symétriques.

EXERCICE DES DEUX SYMÉTRIQUES

1. Sur la figure ci-contre, représentez les quatre points suivants.
   $A(-1\,;\,2)$ et $B(2\,;\,3)$.
   A', symétrique de A par rapport à B.
   B', symétrique de B par rapport à A.
2. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?
3. Quelles sont les coordonnées de A' et de B' ?
4. Que peut-on dire du milieu de $[A'B']$?



Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

Les calculs sont intégralement recopiés.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Calcul des coordonnées d'un milieu.

Exercice du trésor : démonstration de la conjecture à l'aide d'un calcul littéral

Les élèves qui avaient eu le temps de réfléchir à la démonstration générale prennent la parole. L'idée d'exprimer les coordonnées successives en fonction de celles de A émerge. Nous illustrons cette idée à l'aide de Trésor_avec_coordonnées.ggb.

Nous demandons à un élève de choisir des coordonnées de A et nous donnons presque instantanément celles de C en appliquant, sans le dire, les formules $x_C = x_A + 8$ et $y_C = y_A - 4$. Nous vérifions ensuite le résultat à l'aide du fichier GeoGebra, puis expliquons que nous avons pu répondre très vite car nous connaissons les formules qui donnent les coordonnées de C en fonction de celles de A. Nous recommençons une fois ou deux la performance, puis annonçons aux élèves qu'ils vont bientôt devoir trouver ces formules.

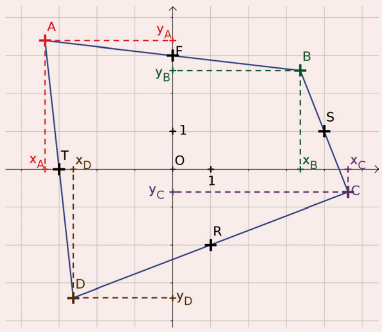
Nous faisons bouger A et leur demandons ce qu'ils pensent de l'abscisse de B. Des élèves conjecturent qu'elle est l'opposé de celle de A. **Travail individuel** pour démontrer que $x_B = -x_A$ puis **en équipes**. Ceux qui ont fini poursuivent. **Plénière**.

Le document ci-contre est collé dans le cahier.

Démonstration de $x_T = -3$ et $y_T = 0$

Nous allons exprimer en fonction de x_A et y_A les coordonnées des points B, C, D et T.

On a déjà : $x_B = 2x_F - x_A = 2 \times 0 - x_A = -x_A$.



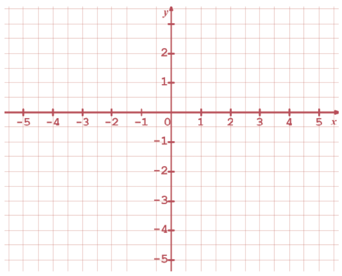
Travail personnel avec entraide pour continuer jusqu'à $x_T = -3$ et $y_T = 0$. Il y a de grosses différences de rythme. Nous autorisons éventuellement certains élèves fragiles à se limiter à des cas particuliers, mais en utilisant les formules. Nous demandons à ceux qui ont terminé de mettre leurs calculs au propre.

Plénière. Des extraits de cahiers de recherche sont projetés. Des erreurs sont travaillées. La démonstration se construit petit à petit. Nous rassurons les élèves qui trouvent cela difficile et leur disons que nous leur donnerons en **devoir à la maison** sur feuille les calculs à refaire avec un autre point origine (voir Exercice du trésor avec une nouvelle origine) ainsi que des petits exercices de géométrie repérée. Lors du bilan, tout le chemin est parcouru.

Les élèves collent une feuille de synthèse fabriquée par nos soins avec des extraits de productions propres, si besoin réorganisés, placés sous des titres et complétés par une conclusion.

EXERCICE DE GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

On considère les points $E(1\ ;\ -1)$, $F(5\ ;\ 3)$, $C(3\ ;\ 1)$ et $H(2\ ;\ 3)$.
1. Représentez ces points sur la figure ci-contre.
2. Démontrez que C est le milieu du segment $[EF]$.
3. Quelles sont les coordonnées du point G tel que C soit le milieu de $[HG]$?
4. Quelle est la nature du quadrilatère $EGFH$?



Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

Le bilan est fait à l'aide du bilan G2 nº 3 contenant une solution de l'exercice.

ÉTAPE 2

Distance entre deux points

Phase d'élaboration des notions de valeur absolue et de distance entre deux nombres | Phases d'élaboration et de prise en main de la formule de la distance entre deux points | Phase d'approfondissement du théorème de Pythagore |
⏱ 3 heures

Nous disons : « Les mathématiciennes et les mathématiciens ont inventé une formule qui donne la distance entre deux points d'un plan en fonction de leurs coordonnées. Avant de travailler sur cette formule, vous allez commencer par le cas de deux points d'une droite. »

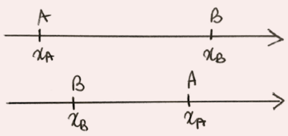
EXERCICE DES DISTANCES SUR UNE DROITE

On considère une droite munie d'un repère et deux points A et B de cette droite.
Comme la droite est munie d'un repère, on peut considérer les abscisses x_A et x_B des deux points.
1. Pour cette question, on fait l'hypothèse que $x_A = 2$ et $x_B = 9$.
Quelle est la distance AB ? Aucune justification n'est demandée.

2. Même question avec l'hypothèse $x_A = 58$ et $x_B = 9$.
3. Même question avec l'hypothèse $x_A = 3$ et $x_B = -2$.
4. On ne fait aucune hypothèse sur x_A et x_B. Exprimez la distance AB en fonction de x_A et x_B.

Travail à la maison, puis plénière. Les résultats sont admis. En fin de plénière, nous introduisons magistralement la valeur absolue et montrons son intérêt ici : avoir une seule formule au lieu de trois pour la question 4. Nous faisons également remarquer que pour tout nombre x, on a $\sqrt{x^2} = |x|$. En lien avec ce qui précède, nous donnons la définition de la distance entre deux nombres réels (voir résumé). Nous l'illustrons à l'aide de la droite numérique. En guise de premières utilisations, nous posons quelques questions du type « Quelle est la distance entre – 3 et – 0,4 ? ». Nous distribuons le résumé Valeur absolue, distance entre deux nombres.

4. Il y a trois cas :
– si $x_B > x_A$, alors $AB = x_B - x_A$
– si $x_B < x_A$, alors $AB = x_A - x_B$
– si $x_B = x_A$, alors $AB = 0$



Soit x un nombre. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :
$|x| = x$ si $x \geq 0$
$|x| = -x$ si $x < 0$

Propriété

Soit A et B deux points d'une droite munie d'un repère. Alors la distance entre A et B est égale à la valeur absolue de $x_B - x_A$.
Autrement dit $AB = |x_B - x_A|$.

DISTANCE ENTRE DEUX POINTS D'UN PLAN

Quelques exemples

Nous ouvrons un fichier GeoGebra, affichons les axes, la grille, la fenêtre Algèbre et sélectionnons l'option « Étiquetage/Seulement les nouveaux points ». Nous affichons les points suivants deux par deux (nous entrons seulement les coordonnées dans la zone de saisie, alors les points et leurs noms s'affichent automatiquement) et demandons de déterminer la distance entre ces deux points : **travail individuel très bref, puis plénière**.

***A*(4 ; 2) et *B*(5 ; 2)**. La question de l'unité est soulevée : il n'y en a pas, comme souvent en géométrie abstraite. Et puisqu'il s'agit de géométrie abstraite, il faudrait une démonstration mais nous admettons le résultat.

***C*(6 ; 4) et *D*(7 ; 5)**. Deux élèves qui ont écrit $CD = 1$ et $CD = 2$ sur leur cahier de recherche prennent la parole. En utilisant, d'une part, que la diagonale d'un carré est plus longue que son côté et, d'autre part, l'inégalité triangulaire, nous arrivons à $1 < CD < 2$, ce qui invalide ces propositions. Puis un élève propose $CD = \sqrt{2}$ et le démontre à l'aide du théorème de Pythagore, en admettant que le triangle qu'il considère est rectangle. C'est une conséquence du fait que le repère est orthonormé, ce que nous admettons. Nous demandons ensuite à GeoGebra la longueur *CD* et jouons un peu avec le nombre de décimales affichées : GeoGebra fait de la géométrie dessinée et donne des valeurs approchées de *CD*.

***E*(– 3 ; 1) et *F*(– 1 ; 2)**. Nous faisons suivre le travail individuel d'un **travail en équipes**.

***G*(1 ; 2) et *H*(100 ; 105)**. Puisque nous avons seulement écrit (100,105) dans la zone de saisie, les élèves ne voient pas *H*. Si besoin, nous faisons une **plénière de régulation** pour faire émerger l'idée de s'appuyer sur un schéma à main levée. Nous faisons suivre le travail individuel d'un **travail en équipes**.

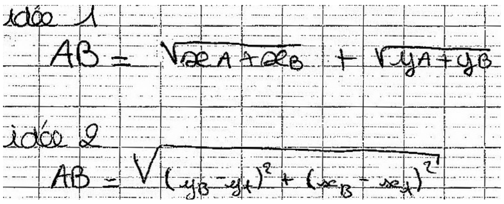
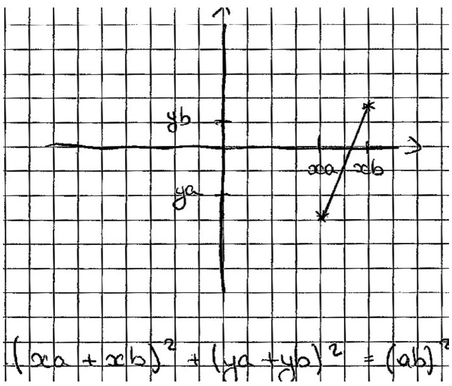
***I*(2 ; – 5) et *J*(– 3 ; – 21)**. Pendant la plénière, nous écrivons au tableau 2 – (– 3) = 5 et (– 5) – (– 21) = 16, et l'y laissons en prévision du travail qui suit.

Recherche de la formule

Nous lançons : « Pour calculer les longueurs précédentes, on aurait aussi pu appliquer une formule pratique inventée par les mathématiciennes et les mathématiciens. Vous allez maintenant à votre tour inventer une formule du genre "AB = …" qui donne la distance entre *A* et *B* en fonction des coordonnées x_A, x_B, y_A et y_B. »

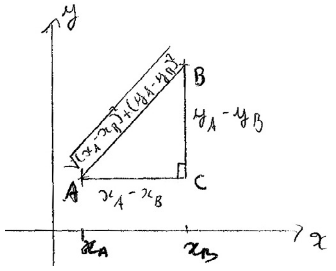
Travail individuel pour proposer une formule, **puis en équipes**. Chaque équipe doit nous rendre une ou deux formules, si possible accompagnées d'un schéma explicatif.

Plénière. Des formules sont projetées et commentées dans un ordre bien choisi, par exemple celui-là.

PRODUCTION	COMMENTAIRES
	On ne comprend pas les formules car il n'y a pas de schéma. L'idée 1 n'est pas bonne car quand on applique le théorème de Pythagore, il y a des carrés. Un élève dit que la deuxième formule n'est pas toujours bonne car il y a plusieurs cas.
	Sur le dessin, il manque le triangle rectangle dans lequel on applique le théorème de Pythagore. Il faut écrire *A* et *B*, et non pas *a* et *b*. $(ab)^2$ n'a pas de sens. $x_a + x_b$ et $y_a + y_b$ sont faux car les côtés de l'angle droit du triangle s'obtiennent à l'aide d'une soustraction, pas d'une addition.

<table>
<tr>
<td>

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$



</td>
<td>

Ah, enfin ! Grâce au schéma, on comprend !
Dans ce cas, les longueurs des côtés de l'angle droit ne sont pas $x_A - x_B$ et $y_A - y_B$ mais $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.
Cette formule est bonne si $x_A > x_B$ et $y_A > y_B$ mais peut-être pas dans les autres cas.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

① Si $xa > xb$ et $ya > yb$: $\sqrt{(xa-xb)^2+(ya-yb)^2}$
② Si $xa < xb$ et $ya < yb$: $\sqrt{(xb-xa)^2+(yb-ya)^2}$
③ Si $xa > xb$ et $ya < yb$: $\sqrt{(xa-xb)^2+(yb-ya)^2}$
④ Si $xa < xb$ et $ya > yb$: $\sqrt{(xb-xa)^2+(ya-yb)^2}$
⑤ Si $xa = xb$ et $ya = yb$: 0

</td>
<td>

En faisant les schémas, on voit que les formules sont bonnes, même s'il aurait fallu mettre des majuscules à *a* et *b*.
Il manque des cas, par exemple $x_A > x_B$ et $y_A > y_B$.
Combien y a-t-il de cas ? (**travail individuel très bref**).
Neuf cas, c'est beaucoup ! Finalement, ces formules ne sont pas si pratiques…

</td>
</tr>
</table>

Puis nous faisons remarquer que les quatre premières formules du dernier groupe reviennent au même car :
– comme $x_A - x_B$ et $x_B - x_A$ sont opposés, on a $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$;
– comme $y_A - y_B$ et $y_B - y_A$ sont opposés, on a $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$.

Il reste à savoir si les quatre premières formules sont encore valables dans les autres cas, c'est-à-dire lorsque $x_B = x_A$ ou $y_B = y_A$.

Travail individuel, puis en équipes pour déterminer si la deuxième formule est valable lorsque $y_B = y_A$ puis **plénière**. La formule $\sqrt{x^2} = |x|$ trouve ici une application. Il s'avère alors que la deuxième formule reste valable lorsque $y_B = y_A$ et nous ajoutons qu'on peut démontrer de la même manière qu'elle reste valable lorsque $x_B = x_A$.

Nous concluons en disant que, comme les mathématiciennes et les mathématiciens, nous allons utiliser la deuxième formule ; elle est valable dans les neuf cas, ce qui est pratique. En guise de premières utilisations, nous demandons aux élèves de l'appliquer sur deux ou trois exemples sans utiliser la calculatrice (**travail individuel très bref** pour chaque exemple).

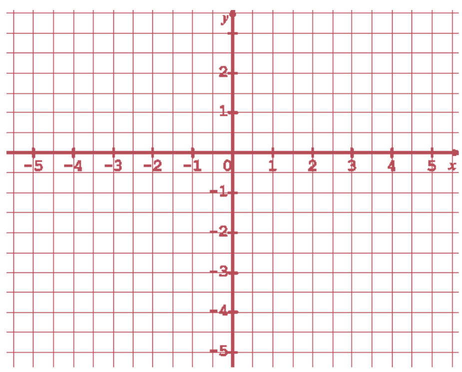
La formule est notée sans figure. Nous renvoyons au cahier de résumés pour une figure. Dès que nous jugeons le moment opportun, nous distribuons le résumé Géométrie plane repérée.

Propriété

La distance entre deux points *A* et *B* est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

EXERCICE DES TROIS POINTS (SANS CALCULATRICE)

Soit les points $M(3 ; -2)$, $N(-2 ; -3)$ et $P(-4 ; 3)$.
1. Représentez ces points sur la figure ci-contre.
2. Le triangle *MNP* est-il rectangle ?



Travail individuel, puis plénière de régulation pour faire émerger l'idée de calculer les longueurs MN, MP et NP puis « d'utiliser Pythagore ». Nous laissons volontairement un flou concernant ce dernier point.

Deuxième plénière de régulation pour se mettre d'accord sur le fait que $MN=\sqrt{26}$; $NP=\sqrt{40}$ et $PN=\sqrt{74}$.

Travail en équipes pour rédiger une démonstration collective, puis **plénière**. Des démonstrations sont projetées et commentées dans un ordre bien choisi, par exemple celui-ci.

PRODUCTION	COMMENTAIRES
On calcule : $PN + NM = \sqrt{40}+\sqrt{26} = \sqrt{66}$ et $\sqrt{66} \neq \sqrt{74}$ On constate que $PM^2 \neq PN^2 + NM^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PMN n'est pas rectangle.	Attention : c'est $PN^2 + NM^2$ qu'il fallait calculer et non pas $PN + NM$. De plus, $\sqrt{40}+\sqrt{26}$ n'est pas égal à $\sqrt{66}$. On a même vu que $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ pour tout $a > 0$ et $b > 0$.
Chloé Eloïse Lola Sandra $PM^2 = NM^2 + NP^2$ $PM^2 = (\sqrt{26})^2 + (\sqrt{40})^2$ $PM^2 = 26 + 40$ $PM = \sqrt{66}$ Non le triangle n'est pas rectangle car PM est égale à $\sqrt{74}$ et non à $\sqrt{66}$.	Est-on sûr que la première égalité est vraie ? Non car on ne sait pas si le triangle est rectangle en N. C'est une erreur de raisonnement. Quand une égalité n'est pas vraie, il ne faut pas l'écrire sans commentaires à côté.
D'après la réciproque de Pythagore, si $PM^2 = PN^2 + MN^2$ alors le triangle est rectangle $PM^2 = \sqrt{74}^2 = 74$ $74 \neq 66$ $PN^2 + MN^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{26}^2 = 40 + 26 = 66$ $PM^2 \neq PN^2 + MN^2$ L'égalité de Pythagore est fausse, le triangle n'est pas rectangle.	La réciproque du théorème de Pythagore est bien énoncée, les calculs sont exacts, mais ce n'est pas la réciproque du théorème de Pythagore qu'il faut utiliser.
$PM = \sqrt{74}$ $NM = \sqrt{26}$ $PN = \sqrt{40}$. Le triangle PMN : Dans le triangle PNM, le plus long côté est [PM]. Donc s'il est rectangle, il l'est en N. $PM^2 = 74$ $NM^2 + PN^2 = 26 + 40 = 66$ $74 \neq 66$ donc, d'après la contraposée du Th. de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle en N.	Effectivement, le plus long côté d'un triangle rectangle est son hypoténuse. Nous confirmons que ce n'est pas la réciproque du théorème de Pythagore qu'il faut utiliser mais le théorème lui-même, plus précisément sa contraposée (qui n'est pas au programme mais que cette équipe a utilisé à bon escient).

$$
\begin{aligned}
MN &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}\\
&= \sqrt{((-2)-3)^2 + ((-3)-(-2))^2}\\
&= \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}\\
&= \sqrt{25+1}\\
&= \sqrt{26}
\end{aligned}
$$

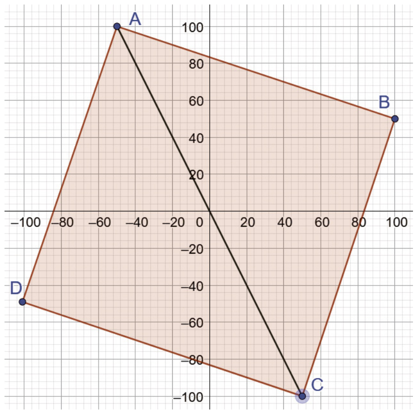
On démontre de la même manière que $NP=\sqrt{40}$ et $PN=\sqrt{74}$.

En dessous, les élèves collent deux productions d'équipes annotées, l'une avec un raisonnement faux, l'autre correcte.

EXERCICE DES DEUX TRIANGLES

On a représenté, sur la figure ci-contre, les triangles ABC et ACD avec $A(-50 ; 100)$; $B(100 ; 50)$; $C(50 ; -100)$; $D(-101 ; -49)$.

1. Démontrez, en détaillant les étapes, que $AC = \sqrt{50\ 000}$.
2. On admet que $AB = \sqrt{25\ 000}$ et $BC = \sqrt{25\ 000}$. Le triangle ABC est-il rectangle en C ?
3. On admet que $CD = \sqrt{25\ 402}$ et $AD = \sqrt{24\ 802}$. Le triangle ACD est-il rectangle en D ?



Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Cette fois-ci, pour la question 2, c'est bien la réciproque du théorème de Pythagore qu'il faut utiliser.

Le bilan est fait à l'aide du bilan G2 n° 4 contenant une solution de l'exercice.

EXERCICE BEAU

On considère les points $B(3 ; 2)$; $E(-1 ; -2)$; $A(-3 ; 0)$; $U(1 ; 4)$.

1. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[BA]$?
2. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[EU]$?
3. Démontrez que le triangle BEA est rectangle.
4. Démontrez que $BEAU$ est un rectangle.

Travail à la maison sur feuille relevé. Nous sélectionnons quelques copies intéressantes dans le but de les projeter et confectionnons, à partir de ces copies, un document à coller dans le cahier. Nous corrigeons les autres copies.

Plénière. Nous projetons les copies sélectionnées. Les élèves débattent, notamment de la propriété utilisée à la question 4. Les copies sont rendues en fin de plénière. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Théorème de Pythagore et réciproque.

Les élèves collent le document confectionné avec des extraits de copies et l'annotent.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Détermination de distances entre deux points.

ÉTAPE 3

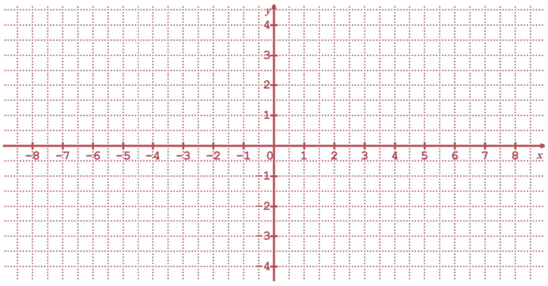
Équations d'une partie du plan

Phase d'élaboration des notions d'ensemble et d'équation de droite | ⏱ 1 heure

EXERCICE N°1 SUR LES ENSEMBLES DE POINTS

Représentez sur la figure les ensembles suivants :

- l'ensemble de tous les points dont l'abscisse vaut 2, que l'on note (e) ;
- l'ensemble de tous les points dont l'ordonnée vaut 3, que l'on note (f) ;
- l'ensemble de tous les points d'abscisse $-2{,}5$ et d'ordonnée positive, que l'on note (g) ;
- l'ensemble de tous les points d'ordonnée 3 et d'abscisse inférieure ou égale à -4, que l'on note (h) ;
- l'ensemble de tous les points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse, que l'on note (k).



Les élèves lisent l'énoncé et posent des questions. Il s'agit de leur première rencontre avec la notion d'ensemble. Nous précisons : « Un ensemble de points est une "collection" de points. Quand on met ces points ensemble, on obtient un nouvel objet mathématique : un ensemble. C'est une nouveauté du programme. Aujourd'hui, il s'agit juste d'une première approche. »

Travail individuel, puis plénière de régulation éventuelle pour représenter au tableau deux points d'abscisse 2 et deux points d'ordonnée 3.

Travail en équipes, puis plénière. Nous projetons le dessin d'un élève qui se limite aux nœuds du réseau, les autres réagissent. Lors des premiers échanges, nous introduisons la notion d'élément et les notations $\in$ et $\notin$, puis nous les utilisons autant que possible. Il n'y a pas d'entraînement sur ce sujet pour le moment ; un travail plus conséquent sur les ensembles sera fait dans la séquence « Ensembles » (non traitée dans cet ouvrage, voir tableau de progression p. 22). La nature des ensembles (droite ou demi-droite) est précisée.

Les élèves complètent leur figure et inscrivent (e), (f)... à côté des ensembles correspondants.

Nous projetons au tableau l'exercice suivant.
Soit M un point quelconque. Soit $(x\,;\,y)$ ses coordonnées.
1. Trouvez une condition simple sur x et y pour que M soit sur la droite (e).
2. Même question avec la droite (f).
3. Même question avec la droite (k).

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Une fois la condition naturelle proposée, nous en demandons une autre (solution possible pour (e) : $2x = 4$). En fin de plénière, nous expliquons : « Chacune de ces conditions s'appelle *une équation de la droite*. C'est une notion importante que nous commençons à travailler aujourd'hui. Le mot *équation* peut être un peu perturbant car il n'y a pas vraiment d'inconnue ici. Si les mathématiciennes et les mathématiciens emploient le mot équation ici, c'est parce qu'il y a une similitude avec la notion d'équation que vous connaissez. À la question "Quelles sont les coordonnées des points de la droite (k) ?", on peut répondre "Les couples de nombres x et y tels que $y = x$". De même, à la question "Quels sont les nombres dont le carré vaut 36 ?", on peut répondre "Les nombres x qui sont solution de l'équation $x^2 = 36$". »

Le bilan est fait à l'aide du bilan G2 n° 5 ci-dessous. Nous y avons volontairement glissé l'erreur « y + 1 = 2 ».

Ensemble (k) des points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse

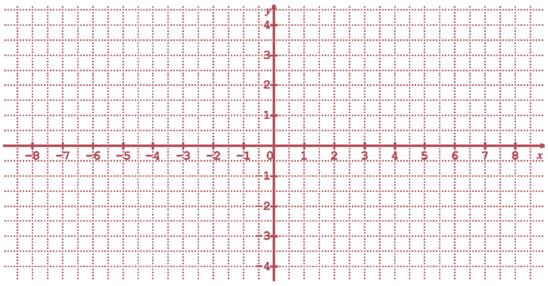
Le point $A(4\,;\,4)$ est un élément de l'ensemble (k) ; on écrit $A \in (k)$.
Soit x un nombre quelconque et M le point de coordonnées $(x\,;\,x)$. Alors $M \in (k)$.
Le point $B(6\,;\,4)$ n'est pas un élément de l'ensemble (k) ; on écrit $B \notin (k)$.
L'ensemble (k) est une droite.

Équations des droites (e), (f) et (k)

Pour qu'un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ soit sur la droite (e), il faut et il suffit que $x = 2$.
On dit que $x = 2$ est une équation de la droite (e). La droite (e) a d'autres équations, par exemple $2x = 4$.
La droite (f) a aussi plusieurs équations, par exemple $y = 3$ ou $y + 1 = 2$.
La droite (k) a aussi plusieurs équations, par exemple $y = x$ ou $y - 2 = x - 2$.

EXERCICE N° 2 SUR LES ENSEMBLES DE POINTS

Représentez sur la figure :
- l'ensemble d'équation $y = 4$, que l'on note (f) ;
- l'ensemble d'équation $y = -x$, c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'ordonnée est l'opposé de l'abscisse, que l'on note (g) ;
- l'ensemble de tous les points dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales et comprises entre 0 et 3, que l'on note (h).



Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Nous profitons des échanges pour retravailler les notions d'ensemble et d'équation de droite. En fin de plénière, nous projetons les diapositives 5 à 10 avec une droite parallèle aux axes ou une bissectrice et demandons quelle pourrait être une équation de cette droite (**travail individuel très bref**). Nous employons le conditionnel car la précision du dessin ne permet pas de savoir, par exemple, si la droite a pour équation $x = 2$ ou $x = 2{,}001$, ce qui n'est pas la même chose en géométrie abstraite.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Les grilles à distribuer sont dans le fichier Grilles.
1. À partir d'une condition en français ou portant sur x et y, représentez l'ensemble de points correspondants sur une petite grille distribuée. Exemples : l'ensemble des points dont l'ordonnée vaut 0 ; l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales ; l'ensemble d'équation $x + y = 0$; l'ensemble d'équation $2x = 6$.
2. Comme à la fin de la plénière précédente, déterminez une équation possible d'une droite à partir de sa représentation.

SÉQUENCE 7

Coefficient directeur d’une droite non verticale (G3)

Cette notion n’a pas été abordée au cycle 4 ou quasiment pas.

PROGRAMME 2019

Géométrie

– Pente (ou coefficient directeur) d’une droite non parallèle à l’axe des ordonnées.
– Déterminer la pente [...] d’une droite donnée par [...] une représentation graphique.
– Établir que trois points sont alignés ou non.
– Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.

Algorithmique et programmation

Dans des cas plus complexes : lire, comprendre, modifier ou compléter [...] un programme.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Cette séquence est consacrée à la notion de coefficient directeur d’une droite. Elle vient après la séquence Vecteurs (1re partie) (non traitée dans cet ouvrage, voir tableau de progression p. 22) où la notion de direction de droite a déjà été abordée. D’autre part, elle prépare le travail à venir sur les équations de droites.

– **Étape 1** : À l’aide d’un jeu en ligne basé sur les déplacements horizontaux et verticaux d’une tortue vers une cible, les élèves élaborent la notion de *pente entre deux points*. Cette notion n’est pas au programme « mais presque » et elle constitue un premier pas intéressant vers la notion de coefficient directeur d’une droite. Toute cette étape se fait en géométrie dessinée, ce qui permet de bien installer l’interprétation graphique de la pente.
– **Étape 2** : La notion de coefficient directeur d’une droite est définie. Elle est appliquée aux problèmes d’alignement et de parallélisme. En prévision du travail sur les équations de droites, nous terminons par un entraînement sur des questions du genre « Soit $A(-1\,;2)$, $B(1\,;1)$. Quelle est l’ordonnée du point d’abscisse 4 de la droite (AB) ? ». Ces questions sont résolues via une mise en équation ; il s’agit du seul travail de calcul littéral de la séquence.

ÉTAPE 1

Pente entre deux points

Phase d'élaboration | ⏱ 2h30

DÉFINITION AVEC L'EXERCICE DE LA CIBLE

Nous allons sur huit.re/direction et présentons l'exercice qui se trouve en bas de la page. Nous indiquons qu'il a pour but de travailler la notion de direction de droite. Nous envoyons l'adresse de la page via l'ENT en précisant que celle-ci met un certain temps à charger.

Travail à la maison, puis plénière. Un premier élève au clavier teste les propositions des autres élèves. Un second note au tableau les couples qui ont permis d'atteindre la cible ; il consigne les résultats dans un tableau à deux lignes Δx et Δy (ces notations sont expliquées). Il apparaît que tout multiple d'un couple solution est encore solution.

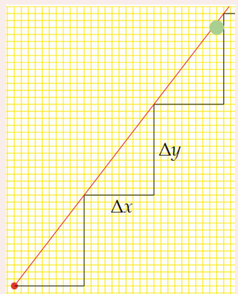
Nous demandons à quelle condition sur Δx et Δy la cible est atteinte (**travail individuel très bref**). L'idée de faire intervenir un des quotients $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ apparaît. Les mathématiciennes et les mathématiciens ont choisi de privilégier le premier par souci de cohérence avec les fonctions (nous n'en disons pas plus). Chaque élève calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour les couples qu'il a trouvés à la maison (**travail individuel très bref**). On arrive ainsi à une condition du type $1,22 \leq \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 1,33$. Avec 1,22 on obtient la tangente au cercle « en bas » ; avec 1,33 on obtient la tangente « en haut ». Ce travail concernant un écran d'ordinateur, nous précisons qu'il s'agit de géométrie dessinée.

Le bilan est fait à partir du bilan G3 n° 1 ci-dessous.

Exercice de la cible

	EXEMPLES DE VALEURS DE Δx ET Δy TELLES QUE LA DEMI-DROITE TOUCHE LA CIBLE					
Déplacement horizontal Δx						
Déplacement vertical Δy						
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$						

On a constaté que l'on atteint la cible à condition que $1,22 \leq \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 1,33$.

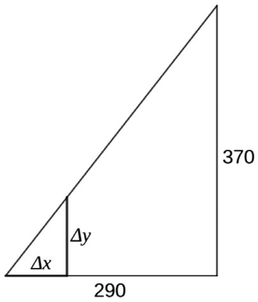


Trajet avec $\Delta x = 100$ et $\Delta y = 130$

Nous allons à l'adresse web huit.re/direction2 où les coordonnées du point de départ et du centre de la cible sont données – (10 ; 20) et (300 ; 390) –, ce que nous expliquons.

Nous écrivons au tableau la question suivante : « Quelles valeurs de Δx et Δy permettent d'atteindre le point B, centre de la cible, avec la ligne rouge ? ».

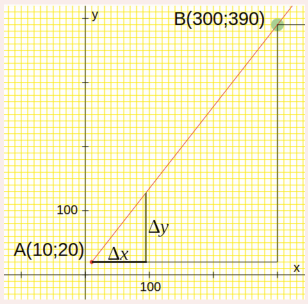
Travail individuel, puis en équipes pour écrire une production commune, puis **plénière**. Nous projetons d'abord des productions où figure le calcul de la moyenne de 1,22 et 1,33 (égale à 1,275) suivi d'une condition du type $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,275$ ou $\Delta y = \Delta x \times 1,275$. Cette méthode ne serait pas correcte en géométrie abstraite mais elle l'est en géométrie dessinée. Puis nous passons aux productions qui utilisent le calcul de $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, environ égal à 1,276. Au cours des discussions, nous montrons le trajet de la tortue lorsque $\Delta x = 300 - 10$ et $\Delta y = 390 - 20$ à l'aide du schéma ci-après.



Pour les premières utilisations, nous modifions les coordonnées de A et B sur huit.re/direction2, cliquons sur « Mettre en place » et demandons deux couples (Δx ; Δy) qui « marchent » ainsi que la pente entre A et B.

Le bilan est fait à partir du bilan G3 n° 2 ci-dessous. Ce bilan comporte volontairement une erreur ($\dfrac{x_N - x_M}{y_N - y_M}$ *au lieu de* $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$) *que les élèves doivent corriger.*

Comment faire passer la droite par le centre de la cible ?



Dans le repère ci-contre, on a $A(10 ; 20)$ et $B(300 ; 390)$.
On a $x_B - x_A = 300 - 10 = 290$ et $y_B - y_A = 390 - 20 = 370$
Donc si on prend $\Delta x = 290$ et $\Delta y = 370$, on atteint B avec une seule « marche ».
Plus généralement, on atteint B à condition que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{370}{290}$ ou que $\Delta y = \dfrac{370}{290} \times \Delta x$
(égalités de Thalès).

Exemple

On a $\dfrac{370}{290} \simeq 1{,}276$. Donc si on prend $\Delta x = 1$ et $\Delta y = 1{,}276$, on atteint B.

Le nombre $\dfrac{370}{290}$ est la pente entre A et B.

Définition

Soit M et N deux points tels que $x_M \neq x_N$. La pente entre M et N est $\dfrac{x_N - x_M}{y_N - y_M}$.

EXERCICE DES QUATRE CIBLES

Le point de départ de la tortue est toujours $A(10 ; 20)$. Il y a maintenant quatre cibles, qui sont les points $B(110 ; 95)$; $C(250 ; 200)$; $D(250 ; 20)$; $E(250 ; -100)$.
Complétez le tableau ci-dessous. Vous pouvez vous aider de l'animation de la page huit.re/direction3.

CIBLE	B	C	D	E
Valeur décimale approchée au centième de la pente entre A et la cible				
Exemple de valeurs de Δx et Δy qui permettent d'atteindre la cible	$\Delta x = 10$ $\Delta y =$	$\Delta x = 4$ $\Delta y =$	$\Delta x = 10$ $\Delta y =$	$\Delta x = 16$ $\Delta y =$

Travail individuel pour le point B, puis **plénière**. Quand on exécute le programme avec $\Delta x = 10$ et $\Delta y = 7.5$, la demi-droite rouge passe par les points B et C. Si des élèves le remarquent, nous ne relevons pas. **Travail à la maison** pour finir, puis **en équipes**, puis **plénière**. La formule $\Delta y = c \times \Delta x$ est utilisée. Ce qui figure dans le bilan ci-dessous est discuté lors des débats.

Le bilan est fait à partir du bilan G3 n° 3 ci-dessous.

Alignement et pente

Comme A, B et C sont alignés, la pente entre A et B est égale à la pente entre A et C.

Signe de la pente

Les cibles B, C, D et E ont une abscisse supérieure à celle de A (ils sont « à droite de A »).
C'est l'ordonnée de la cible qui détermine le signe de la pente entre A et la cible :
$y_B > y_A$ et $y_C > y_A$ donc les pentes entre A et B et entre A et C sont positives ;
$y_D = y_A$ donc la pente entre A et D est nulle ;
$y_E < y_A$ donc la pente entre A et E est négative.

EXERCICE DU TERRIL

Voici une photo d'un terril du nord de la France. Un terril est une colline artificielle construite par accumulation de résidu minier.
Quelle est la pente entre les points B et H ?

Terril à Loos-en-Gohelle (Pas-de-Calais), Compagnie des mines de Lens.

Travail individuel, puis plénière de régulation d'où émerge l'idée de relier B à H à l'aide d'une « marche d'escalier ».

Travail personnel avec entraide, puis plénière. Des élèves s'étonnent de ne pas tous trouver le même résultat, mais c'est normal en géométrie dessinée. À la fin nous disons : « Cette pente est très raide ; il est très difficile, voire impossible, de monter une telle pente à vélo. Les pourcentages qu'on trouve sur les panneaux de signalisation routière indiquant une forte montée correspondent aux pentes mathématiques jusqu'à 15 % environ, ce qui n'est pas le cas ici. »

Chaque élève dessine « une marche d'escalier », indique les mesures et écrit le calcul de pente associé.

PLACEMENT DE COUPLE DE POINTS DE PENTE DONNÉE

Nous distribuons à chaque élève une feuille A4 contenant douze petites grilles vierges (document Grilles).

Travail individuel pour placer deux points A et B tels que la pente entre A et B soit $\frac{1}{3}$, entrecoupé par une **plénière de régulation** où quelques productions fausses sont projetées et commentées.

Travail en équipes, puis plénière. Des productions sont projetées.

Nous recommençons en remplaçant $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{4}$, puis par – 0,5, etc. Aucune trace n'est laissée dans les cahiers, mais la grille est conservée en prévision d'autres exercices dans la séquence G4 à venir.

EXERCICE DE LA ROUTE

Jusqu'à 15 %, les indications sur les panneaux de forte montée correspondent à la pente au sens mathématique. Par exemple, la route qui se trouve derrière ce panneau a une pente de 10 %.
1. Quelle est la mesure de l'angle entre une route de pente 10 % et l'horizontale ?
2. [Question pour les rapides] Un panneau indique une descente dangereuse de 33 %. Cela signifie que si on avance de 100 mètres sur la route, on effectue un dénivelé de 33 mètres. Quelle est la pente au sens mathématique ?

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour mutualiser les difficultés et les pistes.

Travail en équipes, puis plénière. On peut faire un dessin à l'échelle, puis mesurer l'angle au rapporteur. On peut également utiliser que la tangente de l'angle vaut 0,1.
Pour aider les élèves à se représenter une pente de 10 %, nous dessinons au tableau les sommets d'un triangle rectangle de côté horizontal 3 m et de côté vertical 30 cm.
Enfin, nous demandons si la ligne droite dessinée sur le panneau sous l'indication 10 % a effectivement une pente de 10 % (**travail individuel très bref**). On peut se demander pourquoi la sécurité routière a choisi pour tous ces panneaux une pente aussi grande.

Les élèves font un dessin à l'échelle d'une route de pente 10 %, l'angle entre la route et l'horizontale étant noté α.
Soit α l'angle entre la route et l'horizontale. On a $\tan \alpha = \frac{10}{100} = 0{,}1 = 10~\%$, donc $\alpha \simeq 5{,}7°$.

ÉTAPE 2

Coefficient directeur d'une droite

Phase d'élaboration | 1h30

DÉFINITION DU COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE

Plénière de démonstration. On note $p(M, N)$ la pente entre deux points M et N tels que $x_M \neq x_N$.
Soit (d) une droite non verticale et A, B, C, D quatre points distincts de (d).
Question : Comparez $p(A, B)$ et $p(A, C)$.
Question : Comparez $p(A, C)$ et $p(C, A)$.
Question : Comparez $p(C, A)$ et $p(C, D)$.
On en déduit que $p(A, B) = p(C, D)$. Cette valeur commune est appelée *pente ou coefficient directeur de la droite* (d).

Nous projetons au tableau l'exercice suivant : « Soit $A(-5 ; 3)$ et $B(2 ; 1)$. Soit A' le symétrique de A par rapport à B. Quel est le coefficient directeur de la droite (AA') ? ».

Travail individuel très bref, puis plénière. Il n'est pas nécessaire de calculer les coordonnées de A' car le coefficient cherché est égal à la pente entre A et B. Nous insistons sur le fait que pour déterminer la pente d'une droite, on peut choisir deux points quelconques sur cette droite et calculer la pente entre ces deux points. Cette notion de coefficient directeur caractérise la direction des droites non verticales.

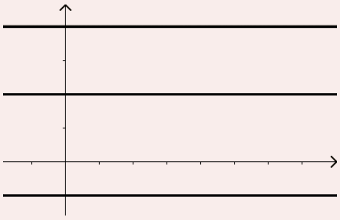
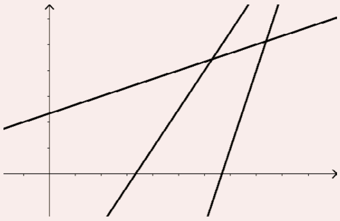
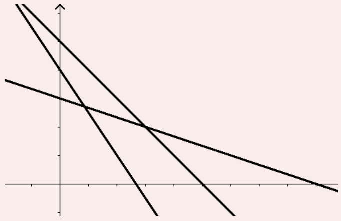
Puis nous passons aux premières utilisations : à l'aide de Coefficient_directeur_à_deviner.ggb, nous demandons aux élèves de déterminer le coefficient directeur d'une droite dessinée. Nous n'ouvrons pas la fenêtre Algèbre de ce fichier GeoGebra.

Le bilan est fait à partir du bilan G3 n° 4 ci-dessous. Ce bilan comporte volontairement une erreur (« augmentent » au lieu de « diminuent » dans la dernière colonne du tableau) que les élèves doivent corriger.

Définition du coefficient directeur d'une droite non verticale

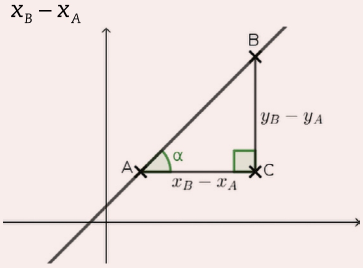
Soit (d) une droite non verticale d'un plan muni d'un repère orthonormé.
Le coefficient directeur, ou pente, de la droite (d) est la pente entre A et B où A et B sont deux points distincts quelconques de (d).
Cette définition a un sens car cette pente ne dépend pas des points A et B de (d) choisis (on l'a démontré).

Interprétation géométrique du signe du coefficient directeur

DROITES DE PENTE NULLE	DROITES DE PENTE POSITIVE	DROITES DE PENTE NÉGATIVE
	 Quand les abscisses augmentent, les ordonnées augmentent.	 Quand les abscisses augmentent, les ordonnées augmentent.

Relation entre coefficient directeur et angle

Dans le cas où le coefficient directeur d'une droite est positif, il est égal à la tangente de l'angle entre la droite et l'horizontale : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan \alpha$.



Propriétés

1. Pour que deux droites non verticales soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles aient le même coefficient directeur.
2. On considère trois points A, B et C tels que $x_B \neq x_A$ et $x_C \neq x_A$.
Pour que A, B et C soient alignés, il faut et il suffit que les droites (AB) et (AC) aient le même coefficient directeur.

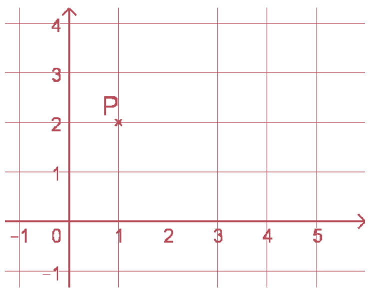
EXERCICES DE GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Exercice 1

Représentez ci-contre la droite passant par P et de coefficient directeur 2.

Même question avec 1, puis $\frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{3}$, puis 0, puis $\frac{-1}{2}$, puis $\frac{-1}{3}$, puis –1, puis –2.

À côté de chacune des neuf droites, indiquez son coefficient directeur.



Exercice 2
Les points $A(2 ; 5)$, $B(3 ; 7)$ et $C(-1 ; -1)$ sont-ils alignés ?

Exercice 3
Soit $D(-3 ; 4)$, $E(-2 ; 2)$, $F(1 ; 3)$ et $G(-6 ; 17)$.
Les droites (DE) et (FG) sont-elles parallèles ?

Exercice 4
Soit (d) une droite de coefficient directeur 0,5. Soit A et B deux points de (d) tels que $x_B - x_A = 8$.
1. Déterminez $y_B - y_A$.
2. Quelle est la distance AB ?

Travail personnel avec entraide pour l'exercice 1, puis **plénière**. **Travail à la maison** pour les autres (donnés un par un), puis **plénière**. Nous commençons par une conjecture faite avec GeoGebra.

EXERCICE DU POINT D'ABSCISSE 6

Soit $P(-1 ; 2)$ et $Q(1 ; 1)$.
1. Soit R le point d'abscisse 6 de la droite (PQ). Quelle est l'ordonnée de R ?
2. [Question pour les rapides] Quelle est l'abscisse du point d'ordonnée 6 de la droite (PQ) ?

Nous prévenons les élèves que cet exercice est particulièrement important dans l'optique de la suite du travail en géométrie.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour conjecturer que $y_R = -1{,}5$ et mutualiser les idées de démonstration :
– calculer le coefficient directeur de la droite (PR') ou (QR') avec $R'(6 ; -1{,}5)$ et montrer que c'est le même que celui de la droite (PQ) ;
– trouver une équation dont y_R est solution.

Nous disons : « La première idée est intéressante mais elle nécessite d'être complétée par un raisonnement subtil et difficile à rédiger. De plus, en suivant cette idée, vous ne prépareriez pas la suite dont je vous ai parlé. Enfin, elle nécessite de deviner le résultat, ce qui n'est pas le cas de la deuxième idée, que vous allez suivre maintenant. »

Éventuellement, le travail est entrecoupé par une deuxième **plénière de régulation** pour mutualiser l'idée qu'on peut obtenir une équation dont y_R est solution en écrivant que les droites (PR) et (PQ) ont le même coefficient directeur.

Travail en équipes, puis plénière. Une fois l'exercice résolu, nous posons une question similaire à la question 1 (**travail individuel très bref**).

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Coefficient directeur d'une droite non verticale.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

À l'aide de Coefficient_directeur_à_deviner.ggb, détermination du coefficient directeur d'une droite dessinée.
Nous posons également des questions similaires à celles de l'exercice précédent.

SÉQUENCE 8

Équations d'une droite (G4)

L'expression « équation de droite » ne figure pas dans le programme du cycle 4 de 2018, ce qui semble en contradiction avec la première phrase du programme de seconde ci-dessous. Nous avons fait comme si cette phrase était : « Au cycle 4, les élèves ont rencontré les droites pour représenter les fonctions affines. »

PROGRAMME 2019

Géométrie

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droites pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droites.
– Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
– Déterminer une équation de droite à partir de deux points [...] ou un point et la pente.
– Tracer une droite connaissant son équation [...] réduite.
– Exemples d'algorithme : déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Dans la séquence G2, les élèves ont rencontré la notion d'équation de droite, mais seulement dans des cas très simples (voir p. 131). Dans G3, ils ont étudié celle de coefficient directeur.

- **Étape 1** : À partir de questions du genre « Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse ... d'une droite (d) donnée par un point et sa pente ? », les élèves expriment y_M en fonction de x_M pour tous les points M de (d). Ils en déduisent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de coordonnées (x ; y) soit sur (d), autrement dit une équation de (d).
- **Étape 2** : Représentation graphique d'une droite donnée par une équation, équation réduite, ordonnée à l'origine, détermination d'une équation réduite par calcul du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine, exercices de synthèse, algorithme et programme de détermination d'une équation de droite passant par deux points donnés.
- **Étape 3** : Pour dessiner une droite sur l'écran de leur calculatrice, les élèves introduisent une fonction affine. Le coefficient directeur de cette fonction affine est interprété comme un taux d'accroissement.

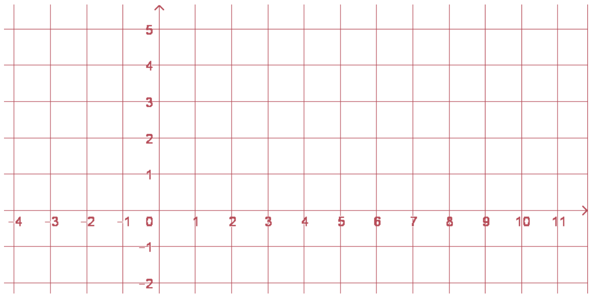
ÉTAPE 1

Équations d'une droite dont on connaît un point et la pente

Phase d'élaboration | 2 heures

EXERCICE DE L'ORDONNÉE INCONNUE

1. Représentez la droite (d) passant par le point $A(1 ; 3)$ et de coefficient directeur – 0,25.
2. Soit B le point d'abscisse 9 de (d). Quelle est son ordonnée ?
3. (Question pour les rapides) Soit C le point d'ordonnée 9 de (d). Quelle est son abscisse ?



Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Nous avons terminé la séquence G3 avec des questions telles que la question 2. La conjecture obtenue via la figure est démontrée. Une fois l'exercice résolu, nous demandons l'ordonnée du point D d'abscisse 10 de (d) (**travail personnel avec entraide**).

Les élèves écrivent le titre de la séquence et les traces des méthodes utilisées.

EXERCICE N° 1 DE LA FORMULE DE L'ORDONNÉE (AU TABLEAU)

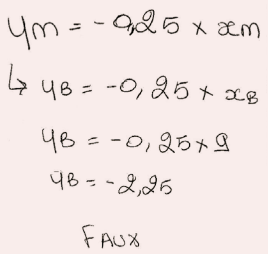
Soit M un point de (d).
1. Exprimez y_M en fonction de x_M.
2. (Question pour les rapides) Exprimez x_M en fonction de y_M.

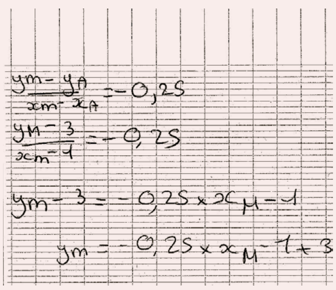
Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Nous précisons la question à l'aide de Point_mobile.ggb en déplaçant M et en faisant le parallèle avec la question « Exprimez le périmètre d'un cercle en fonction de son rayon. » Enfin, les pistes sont mutualisées : un élève propose une relation, par exemple $y_M = -0{,}25x_M$ (erreur classique qui consiste à penser que les coordonnées sont proportionnelles) ; un autre lui répond qu'il faut vérifier ou démontrer ; un troisième propose d'utiliser que le coefficient directeur de la droite (AM) est – 0,25.

Travail en équipes pour écrire une production commune, puis **plénière**. Les productions sont étudiées. Les formules obtenues sont testées avec le point B (**travail individuel très bref**) puis, si elles sont validées, appliquées à un exemple (**travail individuel très bref** pour déterminer l'ordonnée du point d'abscisse … de (d)). La formule réduite n'est pas encore privilégiée.

Nous faisons remarquer que telle formule déduite du calcul du coefficient directeur de (AM) n'est valable que si $M \neq A$. **Travail individuel très bref** pour vérifier si elle est encore valable pour $M = A$.

Deux productions annotées ou corrigées, par exemple les deux ci-dessous, sont collées sous le titre :
« Expression de l'ordonnée d'un point M de (d) en fonction de son abscisse ».





EXERCICE N° 2 DE LA FORMULE DE L'ORDONNÉE

Soit $A(-2 ; 2)$ et $B(0 ; 3)$.
1. Démontrez que le coefficient directeur de la droite (AB) est 0,5.
2. Démontrez que si M est un point de la droite (AB), alors $y_M = 0{,}5x_M + 3$.
3. Parmi les points suivants, déterminez ceux qui sont sur la droite (AB) :
$C(4 ; 6)$ $D(4 ; 5)$ $E(5 ; 5{,}5)$ $F(100 ; 52)$ $G(100 ; 53)$

Travail personnel avec entraide, puis plénière. Question 3. Le fait que $C \notin (AB)$ est une conséquence directe de la question 2. Puis un élève affirme que $D \in (AB)$ car $y_D = 0{,}5x_D + 3$. Nous demandons à l'élève de préciser son raisonnement. S'il a utilisé la réciproque de la question 2 sans précaution, nous le lui faisons remarquer, puis annonçons que cette réciproque est vraie et que nous l'admettons. Une fois la question 3 résolue, nous posons une ou deux questions similaires.

Nous écrivons au tableau l'exercice suivant : « Soit x et y deux nombres. À quelle condition le point de coordonnées $(x\,;\,y)$ est-il sur la droite (AB) ? ».

Travail individuel très bref, puis plénière. Une fois la condition obtenue, nous disons que $y = 0{,}5x + 3$ est *une équation de la droite* (AB). Nous évoquons, sans insister, le fait que les mathématiciennes et les mathématiciens ont choisi ce nom car les coordonnées des points de cette droite, comme par exemple les couples $(-2\,;\,2)$ et $(0\,;\,3)$, sont des solutions de cette équation à deux inconnues. La droite (AB) est la représentation graphique des solutions de cette équation.

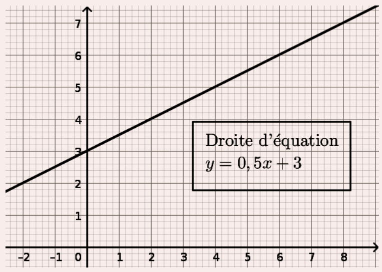
Nous faisons le lien avec ce qui a été fait dans la séquence G2 sur des équations de droites particulières. Pour cela, nous traçons la droite d'équation $y = 1$ dans GeoGebra et en demandons une équation. Nous recommençons avec $x = -2$, puis $x = y$, puis $y = -x$, puis $x = 0$. À chaque fois, nous illustrons la réponse à l'aide d'un point sur la droite et d'un autre hors de la droite. La question faisant référence à une droite dessinée, des réponses telles que $y = 1{,}0003$ ou $x = -2{,}001$ seraient acceptables.

Le bilan est fait à partir du bilan G4 n° 1 ci-dessous. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan et l'exercice des deux équations qui suit.

1 et 2. Mêmes méthodes que précédemment.
3. $0{,}5x_C + 3 = 5 \neq y_C$, donc $C \notin (AB)$. De même, $F \notin (AB)$.
On admet que puisque les coordonnées de D, E et G vérifient la relation $y = 0{,}5x + 3$, ces points sont sur (AB).

Équation de la droite (d)

Pour qu'un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ soit sur la droite (AB), il faut et il suffit que $y = 0{,}5x + 3$.
On dit que $y = 0{,}5x + 3$ est une équation de la droite (AB).
Cela signifie que, pour tout point M :
– si $y_M = 0{,}5x_M + 3$, alors $M \in (AB)$;
– si $y_M \neq 0{,}5x_M + 3$, alors $M \notin (AB)$.



EXERCICE DES DEUX ÉQUATIONS

1. Soit (d) la droite de coefficient directeur $\frac{1}{3}$ passant par l'origine du repère. M étant un point de (d), exprimez y_M en fonction de x_M.
2. Donnez une équation de la droite (d), c'est-à-dire une condition sur les nombres x et y pour qu'un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ soit sur la droite (d) (on ne demande pas de justification).
3. Déterminez une équation de la droite passant par les points $A(1\,;\,1{,}5)$ et $B(3\,;\,1{,}5)$ (on ne demande pas de justification).
4. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (AB) ?
5. (Question pour les rapides) Déterminez une équation de la droite perpendiculaire à (d) passant par l'origine.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière.

(Sans rédiger)

1. $y_M = \frac{1}{3}x_M$ ou $y_M = \frac{x_M}{3}$ 2. $y = \frac{1}{3}x$ ou $y = \frac{x}{3}$ 3. $y = 1{,}5$ 4. $(4{,}5\,;\,1{,}5)$.

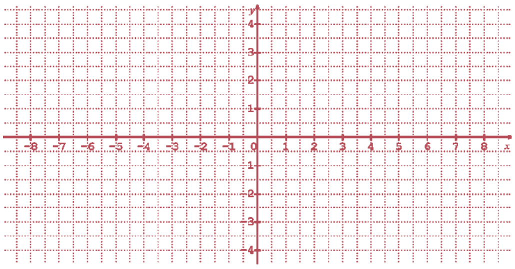
ÉTAPE 2

Droite donnée par une équation, équation réduite

Phases d'élaboration et de prise en main | 3h30

EXERCICE DES TROIS REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

1. Représentez, sur la figure ci-dessous, l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient $y = x - 3$.
2. Même question avec l'ensemble des points dont l'ordonnée est le double de l'abscisse.
3. Même question avec l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient $y = -0{,}5x - 1{,}5$.
4. [Question pour les rapides] Même question avec l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $|x| + |y| = 1$.



Travail individuel, puis plénière pour la question 1. L'idée de placer des points en donnant à x des valeurs particulières émerge. Si un élève dit qu'on peut tracer à la calculatrice les courbes des fonctions affines associées, nous validons sans entrer dans les détails car ce point sera revu à l'étape 3. Des élèves constatent que les points sont alignés et disent que l'ensemble est une droite. Le fait que ces représentations graphiques soient des droites dessinées ne va pas encore de soi : à ce stade, c'est une conséquence du fait que ce sont les courbes représentatives de fonctions affines. Par ailleurs, le fait que les trois ensembles soient des droites abstraites est admis.

Travail personnel avec entraide pour finir, puis **plénière**.

À côté du dessin de chaque droite, les élèves écrivent une équation correspondante [$y = 2x$ pour la deuxième droite].

ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE

Nous ouvrons Cinq_droites.ggb où sont représentées cinq des droites étudiées ainsi que leur équation réduite.

Travail individuel très bref pour trouver un point commun entre ces cinq équations, puis **plénière**. Un élève dit qu'elles sont toutes de la forme $y = px + q$. Nous demandons alors de vérifier si on peut effectivement trouver de tels nombres p et q pour chacune des cinq droites (**travail individuel très bref**).

Nous inscrivons au tableau l'énoncé suivant : « Vrai ou faux ? Si (d) est une droite, alors on peut toujours trouver deux nombres p et q tels que $y = px + q$ soit une équation de (d). »

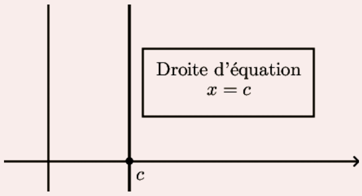
Travail individuel très bref, puis plénière. Le cas des droites verticales est évoqué. Nous donnons la définition de l'*équation réduite* d'une droite et expliquons rapidement comment la méthode utilisée dans l'exercice de l'ordonnée inconnue permet toujours de trouver une équation réduite d'une droite non verticale.

Nous passons à la réciproque et demandons : « Quel est l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient $y = 3x + 1$? » (**travail individuel très bref**). Il émerge que c'est une droite non verticale de coefficient directeur 3, ce qui est admis. L'interprétation géométrique du « 1 », si elle est donnée par un élève, n'est pas encore institutionnalisée.

Le bilan est fait à partir du bilan G4 n° 2 ci-dessous. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan et l'exercice du point d'intersection.

Théorème 1 et définition

Soit (d) une droite.
– 1er cas : (d) n'est pas verticale.
Il existe deux nombres p et q tels que $y = px + q$ soit une équation de (d).
Cette équation est appelée équation réduite de la droite (d).
– 2e cas : (d) est verticale.
Il existe un nombre c tel que $x = c$ soit une équation de (d).



Théorème 2

Soit deux nombres p et q.
L'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $y = px + q$ est une droite non verticale de coefficient directeur p.

EXERCICE DU POINT D'INTERSECTION

Soit (d) la droite d'équation réduite $y = 2x + 0,5$.
1. Donnez deux exemples de points par lesquels passe la droite (d).
2. Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 0 de (d) ?
3. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de (d) et de l'axe des ordonnées ?
4. (Question pour les rapides) Quel est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ tels que $y^2 = 4x^2$?

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. L'expression « ordonnée à l'origine » est donnée. Nous demandons ensuite le point d'intersection de la droite d'équation $y = x + 3$ avec l'axe des ordonnées, puis recommençons avec une ou deux autres équations réduites, et finalement avec l'équation générale $y = px + q$.

Le bilan est fait à partir du bilan G4 n° 3 ci-dessous.

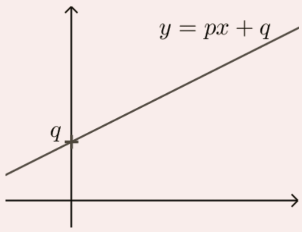
1. $A(1 ; 2,5)$ et $B(2 ; 4,5)$
2. $0,5$ car $2 \times 0 + 0,5 = 0,5$
3. $(0 ; 0,5)$ car les points de l'axe des ordonnées sont ceux d'abscisse nulle.

Théorème

Soit une droite non verticale d'équation $y = px + q$.
Son point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0 ; q)$.

Définition

On dit que q est l'ordonnée à l'origine de la droite (d).



AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

– Le point de coordonnées ... est-il sur la droite d'équation y = ... ?
– À l'aide de Coefficient_directeur_à_deviner.ggb (déjà utilisé dans la séquence G3), déterminez une équation d'une droite par lecture graphique (il s'agit de géométrie dessinée).

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE DROITE

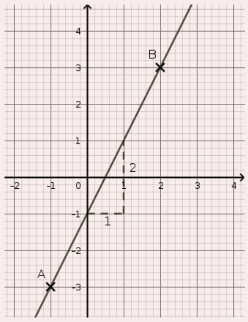
Nous écrivons au tableau l'énoncé suivant : « Représentez la droite d'équation $y = 2x – 1$. »

Les élèves répondent à l'exercice sur la feuille A4 contenant les douze grilles distribuée pendant la séquence G3.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Deux méthodes sont proposées : l'ancienne, qui consiste à placer deux points en donnant deux valeurs différentes à x ; la nouvelle, qui s'appuie sur les interprétations géométriques de p et q.

Ce bilan G4 n° 4 comporte volontairement une erreur (l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur ont été échangés) que les élèves doivent corriger.

REPRÉSENTER UNE DROITE À PARTIR D'UNE ÉQUATION RÉDUITE



On prend l'exemple de la droite (d) d'équation $y = 2x - 1$.

Méthode 1 : utiliser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur

L'ordonnée à l'origine de (d) est 2 et son coefficient directeur est – 1.

Méthode 2 : déterminer deux points de la droite

On choisit deux abscisses, par exemple – 1 et 2.
Soit A le point d'abscisse – 1 de (d). Alors $y_A = 2 \times (-1) - 1 = -3$.
Soit B le point d'abscisse 2 de (d). Alors $y_B = 2 \times 2 - 1 = 3$.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Représentez, sur la feuille avec les grilles, une droite à partir d'une équation, réduite ou non.

EXERCICE DE LA DROITE NON VERTICALE

Soit $A(-2 ; 0)$ et $B(2 ; 3)$.
1. Montrez que la droite (AB) n'est pas verticale.
2. Il existe donc deux nombres p et q tels que $y = px + q$ soit une équation de la droite (AB). Déterminez les nombres p et q.
3. (Question pour les rapides) Quel est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ tels que $4x^2 - 20x + 25 = 0$?

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Il émerge que la condition $x_B \neq x_A$ suffit pour la question 1. Pour la question 2, une conjecture est faite avec GeoGebra.

Travail personnel avec entraide pour la question 2, puis **plénière**.
Des élèves utilisent les méthodes de l'étape 1, puis nous signalons qu'il est plus rapide de résoudre une des équations $y_A = 0{,}75x_A + q$ ou $y_B = 0{,}75x_B + q$ d'inconnue q (**travail individuel très bref** pour les résoudre).

Nous terminons par quelques premières utilisations de cette méthode : « En résolvant une équation d'inconnue l'ordonnée à l'origine, déterminez l'équation réduite de la droite passant par le point … et de coefficient directeur … ».

1. (AB) n'est pas verticale car $x_B \neq x_A$.
2. Avec la formule du coefficient directeur, on trouve $p = 0{,}75$.
Méthode rapide pour trouver q : comme $B \in (AB)$, on a $y_B = 0{,}75x_B + q$, donc $q = y_B - 0{,}75x_B = \ldots = 1{,}5$.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

En résolvant une équation d'inconnue l'ordonnée à l'origine, déterminez l'équation réduite de la droite passant par le point … et de coefficient directeur …

EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DE DROITES

Exercice 1
Soit $A(1 ; 2)$, $B(1 ; 4)$ et (d) la droite d'équation réduite $y = -5x + 2$.
Quel est le point d'intersection des droites (d) et (AB) ?

Exercice 2
Soit $P(0 ; 2)$, $Q(4 ; 3)$ et $R(-4 ; 1)$.
1. Déterminez une équation de la droite (PQ).
2. Les points P, Q et R sont-ils alignés ?

Exercice 3
Soit $A(-0,5 ; 2)$, $B(1 ; -3)$ et $C(2 ; 3)$.
Déterminez une équation de la droite parallèle à (AB) passant par C.

Exercice 4
Déterminez une équation de la droite passant par le point de coordonnées $(-2 ; 0,5)$ et d'ordonnée à l'origine 1,5.

Exercice 5
Soit $M(1 ; \frac{2}{3})$ et $N(\frac{4}{3} ; -2)$.
1. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la droite (MN) avec l'axe des ordonnées ?
2. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la droite (MN) avec l'axe des abscisses ?

Les cinq exercices sont plus ou moins de difficulté croissante. Dans l'exercice 2, l'ordonnée à l'origine peut être obtenue sans calculs.

Travail personnel avec entraide : faire le plus d'exercices possible, dans l'ordre. Pour clore le travail, nous distribuons le document Solutions possibles des exercices sur les équations de droites et laissons quelques minutes aux élèves pour en prendre connaissance.

EXERCICE DE L'ÉQUATION AUTOMATIQUE

Une informaticienne doit écrire un programme Python qui affiche l'équation réduite d'une droite non verticale (MN) lorsque l'utilisateur saisit les coordonnées de M et de N.
Écrivez, à destination de cette informaticienne, un algorithme qu'elle n'aura qu'à traduire en Python.
Votre algorithme doit être suffisamment précis pour qu'elle sache exactement comment faire. Il peut comporter les quatre opérations (+, -, *, /) et les instructions suivantes.
– Demander un nombre entier à l'utilisateur et l'affecter dans la variable ...
– Demander un nombre décimal à l'utilisateur et l'affecter à la variable ...
– Affecter ... à la variable ...
– Afficher ...
– Si ... alors ... sinon ...

Avant de distribuer l'énoncé, nous montrons aux élèves que GeoGebra peut afficher une équation réduite à partir des coordonnées de deux points et leur annonçons qu'ils vont écrire un programme Python qui fait la même chose. **Travail individuel, puis en équipes** pour écrire une production commune.

Plénière. Des propositions comportant des phrases telles que « Demander les coordonnées de M » ou « Résoudre l'équation $y_M = p \times x_M + q$ » sont critiquées, puis nous demandons par quoi on pourrait les remplacer (**travail individuel très bref**). L'intérêt de demander des nombres à virgule flottante plutôt que des entiers est pointé.

Une ou deux productions d'équipes sont collées et éventuellement annotées.

EXERCICE DE L'ÉQUATION AUTOMATIQUE (SUITE)

En utilisant Brython.info ou l'environnement IDLE, écrivez un programme Python qui affiche l'équation réduite d'une droite non verticale (MN) si l'utilisateur saisit les coordonnées de M, puis celles de N.
Aidez-vous si besoin des résumés contenant les instructions Python.
Nommez votre programme Equation_Prenom_NOM.py puis envoyez-le-moi par courriel, même s'il ne fonctionne pas.

L'énoncé est distribué en même temps que les productions d'équipes précédentes. **Travail à la maison, puis plénière**. Quelques programmes sont testés et commentés. La nature des coefficients affichés est interrogée : valeurs exactes ou valeurs approchées ?

Un ou deux programmes d'élèves sont collés et éventuellement annotés.

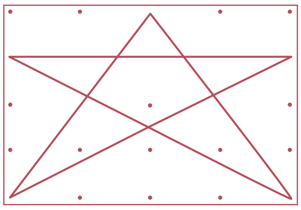
ÉTAPE 3

Fonction affine associée à une droite

Phase d'élaboration | 1 heure

EXERCICE DE L'ÉTOILE

1. Affichez sur l'écran de votre calculatrice une étoile similaire à celle de la capture d'écran ci-dessous.



2. [Question pour les rapides] Affichez un cercle sur l'écran de votre calculatrice.

Nous précisons que les axes n'apparaissent pas sur le dessin de l'énoncé car ils ont été enlevés mais que nous n'en attendons pas forcément autant des élèves.

Travail individuel, puis plénière de régulation où est mutualisée l'idée de trouver des fonctions affines dont les courbes correspondent aux branches de l'étoile. Pour chaque branche, on cherche l'expression d'une fonction qui à l'abscisse x d'un point de la branche associe son ordonnée y. Il s'agit d'une fonction pratique dans la mesure où elle est associée à un problème pratique puisque lié à un dessin, mais nous n'employons pas encore les expressions *fonction pratique* et *fonction théorique* (elles seront vues dans la séquence F3).

Travail personnel avec entraide pour effectuer les tracés, puis **plénière**. Quelques écrans de calculatrice sont placés sous la caméra. Nous commençons par donner la parole aux élèves qui ont placé l'origine en bas à gauche de l'écran (ceux qui ont placé l'origine ailleurs, par exemple au centre de l'écran, expliqueront rapidement comment ils ont procédé à la fin). Pour déterminer les coefficients des fonctions affines, certains élèves déterminent le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites correspondantes, sauf pour la droite dont l'ordonnée à l'origine n'est pas visible. D'autres tâtonnent.

C'est l'occasion d'expliquer la notation « Y = … » des calculatrices, notation également utilisée pour des fonctions non affines : le point d'abscisse x de la courbe d'une fonction f a pour ordonnée $f(x)$, c'est donc le point de coordonnées $(x ; y)$ avec $y = f(x)$.

Chacun place les axes et les unités qu'il a choisis sur son énoncé, ainsi que les noms des points nécessaires afin que les traces ci-dessous soient compréhensibles. Puis il recopie le texte ci-dessous en le complétant avec les résultats qu'il a trouvés (et seulement ceux-là).

La droite .... a pour équation réduite y = ... Pour la tracer, j'ai tracé la courbe de la fonction $f : x \mapsto$ ....
Idem pour .... avec $x \mapsto$ ...., pour .... avec $x \mapsto$ ...., pour .... avec $x \mapsto$ ...., pour .... avec $x \mapsto$ ....

TAUX D'ACCROISSEMENTS DES FONCTIONS AFFINES PRÉCÉDENTES

Comme nous l'avons fait dans l'étape 1 de la séquence F2 (voir p. 231), nous faisons un petit travail sur les taux d'accroissement des fonctions affines, un peu plus difficile cette fois-ci. Nous disons que nous considérons une des fonctions $f : x \mapsto y$ introduite par les élèves dans l'exercice de l'étoile. Pour certaines valeurs de p et q, on a $f(x) = px + q$ pour tout x.

Travail individuel très bref pour exprimer q en fonction de nombre(s) de la forme $f(x)$, puis **plénière**. Une fois la réponse $q = f(0)$ validée, le lien avec l'ordonnée à l'origine est fait.

Travail individuel très bref pour exprimer p en fonction de nombre(s) de la forme $f(x)$, puis **plénière**. Nous faisons le parallèle avec les coefficients directeurs cherchés précédemment. Par exemple, quand on cherche une équation de (AB) avec $A(0\ ;\ 0)$ et $B(4\ ;\ 3)$, le coefficient directeur $\frac{3-0}{4-0}$ est en fait $\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$. L'expression *taux d'accroissement* est rappelée.

Chacun écrit un texte correspondant à la fonction f qu'il avait choisie, par exemple :

Interprétation du coefficient directeur de la fonction affine f

Le coefficient directeur de la fonction $f : x \longmapsto 0{,}75x$ est égal au taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et 4, c'est-à-dire $0{,}75 = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$.

EXERCICE DU POINT D'INTERSECTION AVEC LA CALCULATRICE

1. En utilisant la calculatrice, déterminez des valeurs approchées des coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = -x$ et $y = 0{,}1x + 3$.
2. Déterminez les valeurs exactes de ces coordonnées.

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Équations d'une droite.

CALCUL LITTÉRAL

Structure des expressions algébriques

(Club des expressions)

L'expérience nous a montré qu'en classe de seconde, le nom et les priorités relatives des opérations de base sont parfois encore mal maîtrisés. Le Club des expressions est un site (expressions.club) qui permet aux élèves de retravailler le sens des expressions algébriques. Lorsqu'ils se connectent, ils doivent par exemple reconstituer « graphiquement » l'expression $1 + 2x$ en saisissant le code : (`Somme 1 (Produit 2 x)`). Le système de vérification prend notamment en compte l'ordre des opérandes : par exemple, pour reconstituer $a + b$, il faut taper (`Somme a b`) et non (`Somme b a`). Les expressions $a + b$ et $b + a$ sont bien sûr équivalentes, mais c'est la règle du Club : la reconstitution est purement graphique.

Ainsi, sous prétexte de reconstituer des expressions avec une sorte de code informatique, le « code Club », les élèves déterminent leur nature (somme ou produit ou carré…), les décomposent, travaillent leur structure et font le lien avec leur description en langue française. Le Club des expressions nous semble être un outil intéressant tant du point de vue du diagnostic que de l'entraînement ou de l'approfondissement. Il aide par exemple les élèves à intégrer que $(x + 3)(2x - 1)$ est un produit, ce qui est essentiel pour une réelle compréhension de la méthode de résolution des équations produit. Il permet de travailler cet aspect avant même la première résolution d'équation. Ce travail est aussi utile pour préparer le calcul des limites et des dérivées. Les meilleurs élèves ont également la possibilité de reconstituer des expressions complexes, comme $-\frac{a\sqrt{b}-c^3}{(x+y+z)^2}$: le site les pousse à expliciter l'organisation des calculs et leurs différents niveaux de profondeur.

Les aspects du Club des expressions présentés ci-dessous sont aussi décrits plus longuement sur le site.

MISE EN PLACE AU DÉBUT DE L'ANNÉE

Nous nous créons un compte de type « professeur » en indiquant notre établissement et notre nom afin que les élèves puissent nous retrouver facilement. Concernant les élèves, soit nous leur créons des comptes individuels avec une adresse mail factice et un mot de passe que nous leur communiquerons, soit nous les laissons créer leur compte eux-mêmes. Quand un ou une élève nous a désigné comme étant son professeur, et seulement à partir de ce moment, nous pouvons l'intégrer à un groupe, par exemple celui de la classe.

PRÉSENTATION DU CLUB EN CLASSE

Dans l'exercice des expressions (p. 156), nous commençons par travailler la description en français de quelques expressions ainsi que les priorités opératoires en jeu. Puis, à l'aide du vidéoprojecteur, directement sur le site, nous montrons quel est le code Club de ces expressions (voir la série « Démonstration du Club »).

TRAVAUX DONNÉS AUX ÉLÈVES

Ces travaux se font en général à la maison ou sur un poste du lycée pour ceux qui n'ont pas internet chez eux, mais on peut envisager de les faire en salle informatique. Une série d'expressions est présentée à l'élève (les séries suggérées dans ce livre sont directement disponibles, mais la création de séries par le professeur est aussi possible). L'élève essaye de reconstituer chacune de ces expressions, l'une après l'autre. Cette reconstitution se fait dans un premier temps en mode « interactif ». Ce mode est plutôt ludique car l'expression correspondant à la tentative de l'élève est affichée en temps réel, ce qui lui permet d'avoir un retour instantané et de construire l'expression par petites touches, à tâtons. Une fois cette expression correctement reconstituée, l'élève essaie à nouveau de la reconstituer mais en mode « non interactif », sans retour en temps réel, requérant ainsi davantage de travail d'abstraction : impossible de « bidouiller » jusqu'à ce que l'expression attendue s'affiche. Si ce mode est trop difficile, il existe un bouton « Revenir au mode interactif », mais pour passer à l'expression suivante, il faut réussir à la reconstituer en mode « non interactif ». L'expression suivante est ensuite directement présentée en mode non interactif.

UTILISATION DU TRAVAIL SUR LE CLUB DANS LES AUTRES EXERCICES

Lorsqu'une difficulté liée à la structure d'une expression mathématique survient en classe, nous faisons référence à sa description en français ainsi qu'à son code Club et proposons éventuellement aux élèves de l'écrire. Par exemple, lorsqu'un élève commence par ajouter 2 et 3 pour développer $2 + 3(x + 1)$, nous lui demandons la nature de l'expression et son code Club. Autre exemple : lorsqu'il s'agit de déterminer le minimum de $3 + 4(x + 1)^2$, certains éprouvent des difficultés à écrire la succession d'inégalités : $(x + 1)^2 \geq 0$; $4(x + 1)^2 \geq 0$; $3 + 4(x + 1)^2 \geq 3$. Le code Club (`Somme 3 (Produit 4 (Carré (Somme x 1)))`) peut alors les aider (voir p. 240).

Les séries du Club des expressions que nous proposons dans les pages suivantes sont codées « Séquence-Numéro dans la séquence ». Cela permet d'une part de les désigner et, d'autre part, de les retrouver sur le site où elles apparaissent sous cette désignation.

SÉQUENCE 9

Expressions du premier degré (CL1)

Au cycle 4, le calcul littéral a été introduit pour exprimer un résultat, résoudre un problème ou démontrer une propriété générale. La structure d'une expression algébrique, la propriété de distributivité simple et l'opposé d'une expression algébrique ont été étudiés. Les notations fonctionnelles et les programmes de calcul ont été utilisés, et les fonctions affines et linéaires présentées par leurs expressions analytiques.

PROGRAMME 2019

Nombres et calculs

La mise en évidence de la puissance du calcul littéral comme outil de résolution de problème, déjà rencontrée au collège, reste un objectif important. L'élève doit être confronté à des situations, internes ou externes aux mathématiques, dans lesquelles une modélisation est nécessaire, faisant intervenir variables, expressions algébriques, équations [...].
Il s'agit [...] de souligner le gain en efficacité et en généralité qu'apporte le calcul littéral, en expliquant qu'une grande partie des mathématiques n'a pu se développer qu'au fur et à mesure de l'élaboration, au cours des siècles, de symbolismes efficaces. Il est possible d'étudier des textes anciens d'auteurs tels que [...] Al-Khwârizmî, [...] Viète [...].

- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu [...] des écritures fractionnaires.

Fonctions

Les outils numériques sont mis à profit : [...] le tableur [...] pour mettre en évidence l'aspect de programme de calcul.

Logique

Mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Les notions travaillées ici ont été pour la plupart vues au collège mais il est nécessaire de les retravailler en profondeur en seconde.

- **Étape 1** : À travers deux problèmes pour lesquels il est intéressant de désigner des nombres variables par des lettres, nous redonnons du sens au calcul littéral tout en luttant contre l'idée reçue assez répandue : « S'il y a des x, je dois résoudre. »
- **Étape 2** : Les élèves travaillent le sens des expressions littérales, notamment à l'aide du Club des expressions (voir p. 150). Cette étape doit être faite avant de commencer l'étape 2 de la séquence G1 où un autre travail sur le Club sera fait.
- **Étape 3** : Les élèves travaillent les techniques de développement et de réductions, ainsi que les liens entre programmes de calcul, formules de tableur et fonctions. Les définitions des fonctions linéaires et affines sont revues.

– **Étape 4** : À l'occasion d'un travail sur la moyenne, la notion de solution d'une équation est revue, sans aucune résolution experte. Les techniques de calculs numériques avec des écritures fractionnaires sont réactivées. Cette étape prépare la séquence G2 au cours de laquelle nous travaillerons sur les coordonnées du milieu d'un segment et celles du symétrique d'un point. Elle doit donc être faite avant.

ÉTAPE 1

Utilisation de variables

Phase de prise en main de notions du collège | 1h30

EXERCICE DE L'ORDINATEUR DEVIN

Allez à l'adresse huit.re/ordinateur-devin, puis suivez les instructions. Faites plusieurs essais.
Y a-t-il « un truc » ou l'ordinateur est-il effectivement capable de lire dans vos pensées ?

Pensez-vous qu'un ordinateur puisse lire dans vos pensées ?
Essayez, vous verrez que c'est possible !

Instructions :
Choisissez un nombre entier entre 1 et 99 (prenons par exemple 67).
Soustrayez de ce nombre la somme des chiffres qui le composent.
(dans notre exemple, ça donne : 67 - 6 - 7 = 54)
Regardez le tableau plus bas : il fait correspondre à chaque nombre un symbole.
Cherchez le symbole qui correspond au vôtre et répétez-le dans votre tête pendant 5 secondes.
Enfin, cliquez sur le carré magique !

0 P	1 Œ	2 ®	3 R	4 T	5 €	6 }	7 ¶	8 T	9 P
10 K	11 ®	12 K	13 K	14 F	15 Z	16 K	17 C	18 P	19 J
20 M	21 }	22 Ø	23 C	24 G	25 K	26 Œ	27 P	28 Z	29 T
30 X	31 W	32 €	33 G	34 ^	35 K	36 P	37 T	38 ¶	39 G
40 H	41 R	42 H	43 Œ	44 A	45 P	46 W	47 T	48 Ø	49 ¥
50 P	51 _	52 [	53 [	54 P	55 X	56 G	57 T	58 ^	59 X
60 W	61 ¥	62]	63 P	64 H	65 æ	66 €	67 A	68 S	69 D
70 D	71 ¶	72 P	73 R	74 S	75]	76 P	77 €	78 X	79 K
80]	81 P	82 X	83 _	84 T	85 A	86 }	87 _	88 £	89 P
90 D	91 X	92 F	93]	94 J	95 W	96 F	97 K	98]	99 C

Travail à la maison, puis plénière. Les élèves racontent ce qui s'est passé et l'idée qu'il y a un « truc » s'impose. Certains disent qu'on obtient toujours un multiple de 9 et remarquent que tous les multiples de 9 – sauf 99 – sont associés au même symbole. Cela expliquerait le « truc », à condition qu'on obtienne effectivement toujours un multiple de 9. Le débat porte alors sur cette question. On pourrait tester les 99 nombres de départ possibles mais c'est long. On va essayer de faire plus rapide et plus élégant.

Travail individuel pour effectuer une démonstration générale entrecoupé par une **plénière de régulation**. Des élèves commencent des raisonnements à l'aide de phrases, nous validons cette piste. D'autres proposent d'appeler x le nombre de départ ; cela n'aboutit pas car on ne sait pas exprimer les chiffres des dizaines et des unités en fonction de x. D'autres encore proposent de donner des noms aux chiffres des dizaines et des unités, par exemple a et b. Nous nous mettons d'accord pour que tous ceux qui essayent cette méthode prennent ces mêmes lettres.

Travail individuel, puis en équipes. Une difficulté est d'écrire le nombre de départ en fonction de a et b. Nous aidons ceux qui en ont besoin en écrivant sur leur cahier de recherche « Si $a = 8$ et $b = 5$, alors $x = ?$ » Une fois que les élèves disent $x = 85$, nous leur demandons quel calcul ils ont fait.

Plénière. Nous donnons d'abord la parole aux équipes qui raisonnent à l'aide de phrases. Les raisonnements, complets ou non, sont difficiles à suivre, ce qui justifiera l'emploi des lettres. Voici un exemple de raisonnement tenu par un élève : « On prend un nombre quelconque. Si on lui enlève le chiffre des unités, on obtient un multiple de 10. Le chiffre des dizaines est égal à un dixième de ce nombre. Si on enlève le chiffre des dizaines à ce multiple de 10, on obtient 9 dixièmes de ce multiple de 10, donc un multiple de 9. »

Puis nous passons aux raisonnements avec a et b. Une fois la démonstration faite, la signification de l'égalité $10a + b - a - b = 9a$ est soulignée : pour n'importe quelles valeurs données à a et b, l'expression $10a + b - a - b$ donne le même résultat que l'expression $9a$. On dit que ces deux expressions sont *équivalentes*. Les conventions d'écriture utilisées sont rappelées. Si des élèves soulèvent la question de l'équivalence entre $10a + b - a - b$ et $10a + b - (a + b)$, nous en parlons rapidement mais n'institutionnalisons pas encore la règle sur la soustraction d'une somme.

En fin de plénière, nous projetons un texte du mathématicien perse Al-Khwârizmî (diapositive 1). C'est un extrait de l'*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, publié entre 813 et 833, livre considéré comme le premier manuel d'algèbre. Nous insistons sur le fait que ce livre ne contient aucun chiffre : tous les nombres dont il est question dans les équations sont exprimés avec des mots. Le carré de l'inconnue est nommé « le carré » ou « mâl », l'inconnue est « la chose » ou « shay » (šay), la racine est le « jidhr », la constante est le « dirham » ou « adǎd ». Nous projetons ensuite un timbre à l'effigie d'Al-Khwârizmî ainsi qu'une de ses productions calligraphiée (diapositive 2).

Puis nous projetons une résolution d'équation par Raphaël Bombelli (mathématicien italien du XVIe siècle), extraite de *L'Algebra* (1572) (diapositive 3). Nous n'expliquons pas le déroulement de la résolution mais montrons d'une part les progrès par rapport aux notations d'Al-Khwârizmî (ou à l'absence de notation, voire l'absence de nombres écrits en chiffres) et d'autre part les progrès faits depuis. Nous détaillons la correspondance entre les notations de Bombelli et les notations actuelles : des « L » tête-bêche pour les parenthèses, « p » pour +, « m » pour -, « R.q. » pour la racine carrée, et surtout les « arrondis numérotés ». Dans l'image suivante (diapositive 4), Bombelli explique ces dernières notations, qui peuvent nous sembler aujourd'hui farfelues, où le nombre (ici une inconnue) n'est pas désigné par une lettre.

Premières utilisations et notion de contre-exemple

Ensuite, nous entraînons quelques minutes les élèves à réduire des expressions simples du premier degré à une ou deux variables. Pour chaque expression, nous écrivons au tableau une phrase du type « a représente n'importe quel nombre » ou bien « pour tout nombre x », et nous disons ces phrases oralement à chaque fois qu'une égalité intervient.

Lorsqu'un élève propose une égalité fausse, par exemple $2 + 3x + x = 6x$, d'autres élèves observent que c'est une erreur et nous demandons pourquoi (**travail individuel très bref**). La nécessité de produire un contre-exemple émerge. Nous insistons sur ce point et en reparlerons à l'occasion.

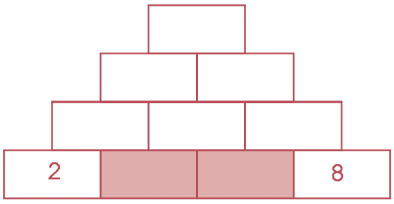
Nous terminons par une expression du premier degré x assez compliquée, par exemple $(-2) + x - 7 + 3 - 2x + 6x + 6$. Une fois réduite, nous demandons combien vaut cette expression lorsque $x = 1$. Après quelques secondes, nous demandons à ceux qui ont terminé de lever la main. Les élèves qui utilisent l'expression de départ non réduite n'ont pas pu finir et sont étonnés que d'autres lèvent déjà la main ! Ce fait marquant les aide à donner du sens à l'égalité de deux expressions littérales et à utiliser la forme la plus adaptée au contexte.

Les élèves écrivent le titre de la séquence, puis recopient les traces des méthodes de résolution de l'exercice.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons les résumés Quelques conventions d'écriture des expressions mathématiques et Calcul littéral (la partie polycopiée du deuxième résumé est très courte, le reste sera écrit à la main petit à petit).

EXERCICE DU MUR DE BRIQUES

Dans le mur de briques ci-dessous, le contenu d'une brique est la somme des deux briques qui se trouvent sous elle. Si on met un même nombre dans les deux briques grises, on peut alors calculer de proche en proche le contenu de la brique du sommet.



Nous lisons l'énoncé à voix haute, demandons à un élève de proposer un nombre pour les deux cases grises, et donnons presque instantanément le nombre du sommet ! Les élèves vérifient alors au crayon à papier sur leur énoncé que nous ne nous sommes pas trompés. Nous reproduisons une fois ou deux la « performance ».

Travail individuel pour trouver le « truc », éventuellement entrecoupé par une **plénière de régulation** pour qu'émerge l'idée de désigner par une lettre le nombre inscrit dans les cases grises et d'exprimer les autres nombres en fonction de celui-là. Ceux qui ont terminé réfléchissent à la conception d'un lecteur de pensée pour des nombres à trois chiffres (voir l'exercice de l'ordinateur devin p. 153).

Travail en équipes, puis plénière. Nous demandons d'abord quel serait le résultat s'il y avait 100 dans les deux cases grises. Une fois établi qu'il faut multiplier par 6 puis ajouter 10, nous demandons à un volontaire de venir le démontrer au tableau.

Le mur est complété avec les expressions littérales.
Quand on met un nombre x dans les briques grises, on obtient $6x + 10$ dans la brique au sommet.
Conclusion : pour aller vite, le professeur multipliait par 6 puis ajoutait 10.

ÉTAPE 2

Structure des expressions algébriques et Club des expressions

Phase de prise en main de notions du collège | ⏱ 1 heure

Le Club des expressions est un site web qui conduit les élèves à décomposer et comprendre la structure des expressions algébriques proposées par leur professeur. Pour cela, les élèves doivent reconstituer ces expressions avec une sorte de code informatique (voir p. 150). Par exemple $1 + 2x$ devra être codée par `(Somme 1 (Produit 2 x))`.

Avant de débuter cette étape, nous nous assurons que tous les élèves ont un compte sur le Club et que nous les avons bien inscrits dans le groupe de la classe.

EXERCICE DES EXPRESSIONS

Complétez les cases vides des quatre premières colonnes.

EXPRESSION	ÉTAPES (DANS L'ORDRE)	OPÉRATIONS (DANS L'ORDRE)	DESCRIPTION EN FRANÇAIS	CODE CLUB
$5(x + 2)$	$x \to x+2 \to 5(x+2)$	Ajouter 2 Multiplier par 5	Le produit de 5 par la somme de x et 2.	
$1 + 2x$				
			Le quotient de la différence entre y et 1 par 2.	
$2(3a + 4)$				

Les élèves lisent la première ligne et posent des questions. **Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière**. Les propositions sont débattues avec comme appui le résumé Quelques conventions d'écriture des expressions mathématiques distribué précédemment. Nous distribuons le résumé Vocabulaire des opérations.

Les quatre premières colonnes sont complétées.

Nous montrons au vidéoprojecteur comment fonctionne le Club des expressions sur la série de démonstration comportant les quatre expressions ci-dessus. Nous montrons les deux modes : interactif (plus facile) et non interactif (plus difficile). Nous faisons remarquer que, avec le code Club, le mot écrit le plus à gauche correspond à l'opération à effectuer en dernier (ce mot détermine la nature de l'expression), et les mots les plus à l'intérieur des parenthèses correspondent aux opérations à effectuer en dernier. En outre, nous mettons en garde les élèves contre le fait que le système de vérification prend en compte l'ordre des opérandes. Par exemple, (`Somme b a`) ne permet pas de reconstituer « a + b ».

La dernière colonne est remplie.

EXERCICE : SÉRIE CL1-1 (CLUB DES EXPRESSIONS)

Allez à l'adresse http://expressions.club et connectez-vous (bouton « Connexion »).
Dans l'onglet « Travail », vous trouverez la « Série CL1-1 ». Vous devez alors reconstituer les expressions suivantes.

1. $3x$
2. $\frac{R}{4}$
3. $10(x-2)$
4. $10a+b$
5. $1-(-x)$
6. $\frac{ab}{c}$
7. $a\frac{b}{c}$
8. $10a+b-a$
9. $10a+b-a-b$

Vous devez réussir à reconstituer une expression en mode non interactif avant que le système ne vous propose la suivante. Si vous avez des difficultés, vous pouvez repasser en mode interactif (votre tentative se construit alors à l'écran en même temps que vous tapez votre code).
Tout le monde doit avoir pour objectif de reconstituer les sept premières expressions. Les deux dernières peuvent être considérées comme des défis.
Le site enregistre votre activité. Votre travail sera vérifié en ligne.

Travail à la maison. Dans un espace du site uniquement accessible au professeur, nous pouvons savoir jusqu'où est allé chaque élève. Il peut arriver qu'une partie significative de la classe n'ait réussi ou ni même tenté plus d'une expression. Dans ce cas, nous les accompagnons personnellement devant l'écran, par exemple individuellement à la fin d'un cours.

Plénière. Nous revenons rapidement sur les expressions qui ont posé le plus de problèmes (onglet « Séries », choisir la « série CL1-1 », puis cliquer sur le bouton « Tester »).

EXERCICE : SÉRIE CL1-2 (CLUB DES EXPRESSIONS)

En nous appuyant sur les difficultés observées dans la classe, nous composons nous-mêmes la série CL1-2 à l'aide d'expressions du premier degré et la donnons à faire **à la maison**.

ÉTAPE 3

Techniques de calcul littéral et définition des fonctions linéaires et affines

Phase de prise en main de notions du collège | 2h15

Nous demandons un exemple de programme de calcul de deux ou trois opérations pouvant s'appliquer à n'importe quel nombre de départ. Nous le notons au tableau et tous les élèves l'appliquent à un nombre de départ simple (**travail individuel très bref**). Tous doivent y arriver ; si ce n'est pas le cas, nous recommençons avec un autre nombre. Enfin, nous notons au tableau le programme de calcul n° 1 ci-dessous (il doit rester visible pendant le reste de la séance).

```
Doubler
Ajouter 3
Multiplier par 5
Retirer 20
Diviser par 10
```

Travail individuel très bref pour le tester avec 1, puis plénière. Une fois établi que le résultat est 0,5, nous projetons Programme_de_calcul_n°1.ods et posons la question suivante : « Quelles formules pourrait-on saisir dans la cellule H2 pour qu'en la tirant vers la gauche puis vers la droite, les résultats du programme s'affichent sur la ligne 2 ? ».

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Un élève saisit au clavier différentes propositions. Nous choisissons avec soin l'ordre des formules testées, en commençant par celles qui comportent des erreurs simples à comprendre. Les formules qui ne donnent pas 0,5 sont invalidées. Nous rassurons les élèves en difficulté en leur disant qu'ils auront bientôt l'occasion de retravailler cela tranquillement.

Une fois la formule =((2*H1+3)*5-20)/10 validée, celle-ci est recopiée vers la gauche et vers la droite. Nous demandons ensuite de deviner, sans calculatrice, le résultat du programme avec 837 comme nombre de départ (**travail individuel très bref**). Des élèves proposent 836,5 et conjecturent que le programme de calcul revient à retirer 0,5 pour n'importe quel nombre de départ. Nous demandons si cette conjecture a besoin d'être prouvée : il émerge que ce qu'on a fait ne suffit pas car il y a une infinité de nombres de départ possibles et que cela nécessite une démonstration. Nous distribuons alors l'exercice suivant.

EXERCICE DES DEUX PROGRAMMES DE CALCUL

Voici deux programmes de calcul qui peuvent s'appliquer à n'importe quel nombre de départ.

Programme de calcul n° 1

```
Doubler
Ajouter 3
Multiplier par 5
Retirer 20
Diviser par 10
```

Programme de calcul n° 2

```
Retirer 0,5
```

En saisissant =((2*H1+3)*5-20)/10 dans la cellule H2 et en recopiant cette formule à droite et à gauche, on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Nombre de départ	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
2	Résultat du programme	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5

On a alors conjecturé que les programmes n° 1 et n° 2 donnent le même résultat pour tous les nombres de départ. Démontrez cette conjecture.

Travail individuel pour démontrer la conjecture, puis **en équipes** pour écrire une démonstration commune. Ceux qui ont terminé ont pour consigne d'écrire un programme de calcul de quatre étapes, commençant par « Ajouter 4, tripler » et qui revient au programme de calcul n° 2.

Plénière. Les preuves sont projetées et commentées dans un ordre bien choisi, par exemple celui-ci.

PRODUCTION	COMMENTAIRE OU QUESTION
$x + 2x$ $x + 3$ $x \times 5$ $x - 20$ $x \div 10$	Attention : une même lettre x doit toujours représenter un même nombre.
2x + 3 × 5 − 20 / 10 2x + 15 − 20 / 10 2x − 5 / 10 2x − 0,5	Il manque des parenthèses. **Travail individuel très bref** : ajouter les parenthèses.
$x \times 2 = 2x$ $2x + 3 = 2x + 3$ $(2x+3) \times 5 = 10x + 15$ $(10x + 15) - 20 = 10x + -5$ $(10x + -5) \div 10 = 0x + -0,5$	Le résultat final est-il correct ? La distributivité de la division sur la soustraction est reliée à la formule : $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ Ne pas écrire + et − à la suite.
p1 : $x \xrightarrow{\times 2} 2x \to 2x+3 \xrightarrow{\times 5} 10x + 15 \xrightarrow{-20} 10x - 5 \xrightarrow{:10} x - 95.$ le programme 1 ammène a soustraire 95.	D'où vient le $x - 0,5$? Très bon travail !
$\frac{5(2x+3)-20}{10} = \frac{10x+15-20}{10} = \frac{10x-5}{5} = x - 0,5$	Presque parfait ! Les signes = doivent être au niveau des barres de fraction.

Une fois la projection finie, nous entraînons les élèves à développer des expressions simples, par exemple $2(x + 1)$; $3(6 - x)$; $2(4x + 3)$; $\frac{3x-9}{3}$; $\frac{6x+12}{3}$; etc.

Lorsqu'un élève propose une expression erronée et qu'un autre affirme que c'est faux, nous demandons de le démontrer (**travail individuel très bref**). La notion de *contre-exemple* est mise à nouveau en avant.

Deux productions intéressantes et employant des méthodes différentes sont annotées et collées.
Sur le cahier de résumés, à la page intitulée « Calcul littéral », les élèves écrivent à la suite du polycopié distribué lors de l'étape 1 :
b. 5(2x + 3) = 5 x 2x + 5 x 3 = 10x + 15 (distributivité de la multiplication)
c. $\frac{10x-5}{10} = \frac{10x}{10} - \frac{5}{10} = x - 0,5$ (distributivité de la division)

Interprétation en termes de fonction

Nous expliquons : « Les programmes de calcul n° 1 et n° 2 correspondent à la fonction qui à un nombre x associe $x - 0{,}5$. Cette fonction peut se noter $x \mapsto x - 0{,}5$. Une *fonction* est un procédé qui associe à chaque nombre de départ un autre nombre. Cet autre nombre est appelé *image du premier nombre*. L'image d'un nombre x par une fonction g est notée $g(x)$ ».

Travail individuel très bref pour déterminer si f est affine et si elle est linéaire, puis **plénière**. Les raisonnements suivants émergent.
– Une fonction affine consiste à multiplier le nombre de départ toujours par le même nombre, puis à ajouter toujours un même nombre, donc f est affine car $f(x) = 1 \times x + (-0{,}5)$ pour tout x.
– Une fonction linéaire consiste à multiplier le nombre de départ toujours par le même nombre. Donc l'image de 0 par une fonction linéaire est 0, ce qui n'est pas le cas de f ; donc f n'est pas linéaire.

Le bilan est fait à l'aide du bilan CL1 n° 1. Il contient des explications sur la fonction associée aux programmes de calcul n° 1 et n° 2 ainsi que les définitions des fonctions linéaires et affines.

Utilisation des lettres par François Viète

Nous avons vu que Raphaël Bombelli travaillait avec des nombres écrits avec des chiffres. Il ne pouvait ainsi résoudre qu'une seule équation à la fois et non un type d'équation. François Viète apporte une précieuse généralisation grâce à l'utilisation des lettres : « Viète oppose lui-même sa *logistica speciosa* à la *logistica numerosa* antérieure. La première seule est l'algèbre, méthode pour opérer sur des espèces, des classes de choses ; la deuxième est l'arithmétique, qui opère seulement sur les nombres [10]. »

Nous projetons un extrait d'un texte de François Viète (diapositive 5) où apparaît « Ad Logisticen Spec. ». « Logistica speciosa » et « Ad Logisticen Spec. » signifient « logique des espèces » et « Logistica numerosa » correspond à la « logique des nombres ».

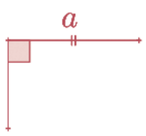
Là où Bombelli travaillait avec les coefficients 1, 8 et 16, Viète aurait pu utiliser d'autres lettres comme a, b et c. On passe de l'étude de $x^2 + 8x + 16$ à celle de $ax^2 + bx + c$. Il n'est pas étonnant que la compréhension de l'expression $ax + b$ soit difficile pour les élèves car c'est un apport relativement récent dans l'histoire des mathématiques.

À la toute fin du XVIe siècle, Adrianus Romanus, mathématicien flamand, défia la communauté mathématique européenne en proposant de résoudre une équation de degré 45. L'ambassadeur de Hollande vint trouver Henri IV en prétendant qu'il n'y avait pas de mathématicien en France pour relever ce défi. Henri IV fit appel à Viète qui utilisa la trigonométrie pour obtenir toutes les solutions.

ENTRAÎNEMENT DE CALCUL LITTÉRAL N° 1

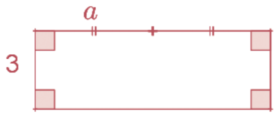
Attention ! La première fois, ne traitez que les questions : Série 1-1 ; Série 2-1 ; Série 2-2 ; Série 3-1 ; Série 4-1 ; Série 5-1. Les fois suivantes, vous aurez d'autres questions à traiter, à la suite des premières. Répondez à la suite de l'énoncé de la série 5.

Série 1
a désigne n'importe quel nombre strictement positif.
Recopiez le schéma ci-dessous puis complétez-le de manière à ce que le rectangle schématisé remplisse la condition demandée. Attention : a ne doit être écrit qu'une seule fois sur le schéma (comme dans l'exemple page suivante).



10 Amy Dahan-Dalmedico, Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Paris, Seuil, 1986.

Exemple : Schéma d'un rectangle de périmètre $3 + 2a + 3 + 2a$ et d'aire $3 \times 2a$



1. Le périmètre du rectangle est $a + 5 + a + 5$.
2. L'aire du rectangle est $2a$.
3. Le périmètre du rectangle est $6a + 4$.
4. Le périmètre du rectangle est $2(a + 4)$.
5. L'aire du rectangle est $2(a + 3)$ et son périmètre est $2(a + 5)$.

Série 2
Pour chaque affirmation suivante, si vous pensez qu'elle est fausse, démontrez-le à l'aide d'un contre-exemple. Si vous pensez qu'elle est vraie, démontrez-le à l'aide d'un calcul littéral.
1. Pour tous les nombres x, on a $4 + 3x = 7x$.
2. Pour tous les nombres y, on a $y^2 = 2y$.
3. Pour tous les nombres z, on a $2z + z - 8 = 3z - 7 - 1$.
4. Pour tous les nombres t, on a $\frac{4t-8}{8} = 4t - 1$.
5. Pour tous les nombres t, on a $3(t + 1) + 5 = t + 2(t + 4)$.

Série 3
x représente n'importe quel nombre. Réduisez les expressions suivantes.
1. $15 - 8x - 2x$
2. $3x + 4 + x - 1$
3. $98 + 2x - 3 + 1 - x$
4. $3{,}5x - 4x - x$

Série 4
x représente n'importe quel nombre. Développez et réduisez les expressions suivantes.
1. $2(x+5)+1$
2. $1+4(2x+3)$
3. $\frac{4x-8}{4} - x$
4. $2+8(0{,}5-x)$
5. $\frac{3x+14}{2} - \frac{x}{2}$

Série 5
Pour chaque fonction, répondez à la question a. puis à la question b.
a. La fonction est-elle linéaire ? Justifiez.
b. La fonction est-elle affine ? Justifiez.
1. $f : x \mapsto x + 5x$
2. $g : x \mapsto 2x + 5 + 3(x+1)$
3. $h : x \mapsto \frac{x+2}{2}$
4. $i : x \mapsto \frac{2x-1}{3} + \frac{4-x}{3}$

Avant de distribuer l'énoncé, nous reproduisons au tableau le dessin du rectangle de l'exemple de la série 1 et demandons d'exprimer son aire et son périmètre en fonction de a (**travail individuel très bref, puis en équipes, puis plénière**).

L'énoncé, de format A4, occupe la première page d'une feuille A3 pliée en deux. Nous utilisons le protocole des « séries d'exercices avec allers-retours » (voir p. 45). Lorsque nous donnons à un élève les questions à traiter, il nous arrive parfois de remplacer les questions de l'énoncé par d'autres afin de mieux coller aux besoins de l'élève. Nous faisons trois ou quatre allers-retours. Lors du dernier, les élèves sont autorisés à faire davantage de questions que celles demandées. À la fin, nous leur faisons parvenir les solutions via l'ENT.

EXERCICE DU PROGRAMME DE CALCUL N° 3

Voici un programme de calcul :

```
Ajouter 6
Soustraire à 6 le résultat obtenu
```

Attention ! Soustraire à 6 un nombre signifie calculer la différence entre 6 et ce nombre.
Par exemple, soustraire à 6 le nombre 2 signifie calculer 6 – 2.
Ce programme peut se résumer à une seule opération : laquelle ?

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. La nécessité de mettre l'expression qu'on soustrait entre parenthèses est discutée.
Nous illustrons la propriété sur la soustraction d'une somme par des égalités du type 100 – (10 + 2) = 100 – 10 – 2.
Il y a deux manières de résumer le programme en une seule opération : prendre l'opposé et multiplier par – 1.
Lorsque la « bonne manière » de soustraire une somme a été vue, nous passons aux premières utilisations : réduire $x - (2 + x)$, etc.
Pour terminer, nous demandons ce qu'on peut dire de la fonction associée à ce programme (elle est linéaire).

Avec x comme nombre de départ, le résultat est : $6 - (6 + x) = 6 - 6 - x = -x = (-1)x$.
Donc ce programme revient à multiplier par – 1.

EXERCICE DU PROGRAMME DE CALCUL N° 4

Voici un programme de calcul :

```
Tripler
Soustraire à 6 le résultat obtenu
Soustraire encore à 6 le résultat obtenu
```

Ce programme peut se résumer à une seule opération : laquelle ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Le protocole est similaire.
Pour illustrer $a - (b - c) = a - b + c$, nous disons que pour calculer 562 – (100 – 1), on peut d'abord calculer 562 – 100 mais qu'il faut ensuite ajouter 1 car on a enlevé 1 de trop.

Avec x comme nombre de départ, le résultat est : $6 - (6 - 3x) = 6 - 6 + 3x = 3x$.
Donc ce programme revient à multiplier par 3.

Sur le cahier de résumés, à la page intitulée « Calcul littéral », les élèves écrivent :
d. $6 - (1 + x) = 6 - 1 - x$ (soustraction d'une somme)
e. $3x - (2 - x) = 3x - 2 + x$ (soustraction d'une différence)

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

- Questions similaires à celles des séries 2, 3, 4 et 5 de l'entraînement de calcul littéral n° 1 et des deux exercices précédents (exercice du programme de calcul n° 3 et exercice du programme de calcul n° 4).
- Vrai ou faux du genre : « Pour tout x, on a : $5x - (x - 1) = 4x - 1$. »

ÉTAPE 4

Moyenne et solution d'une d'équation

Phase de prise en main de notions du collège | ⏱ 1h30

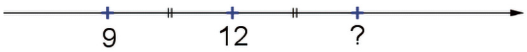
Ce travail prépare notre exercice d'introduction à la géométrie repérée (voir p. 122). Nous disons : « Il y a deux nombres. L'un est connu : c'est 9. L'autre est inconnu. La moyenne de ces deux nombres est 12. Quel est le nombre inconnu ? » et écrivons au tableau : « Nombre connu : 9 ; Nombre inconnu : ? ; Moyenne : 12 ».

Travail individuel très bref, puis plénière. Les différentes méthodes sont mutualisées.

Nous recommençons rapidement avec d'autres valeurs : nombre connu 5 et moyenne 9 ; nombre connu 300 et moyenne 200, etc. Nous laissons les différents résultats au tableau en vue du travail à suivre.

Le lien avec les équations $\frac{5+x}{2}=9$ et $\frac{300+x}{2}=200$ est fait mais la résolution experte n'est pas faite en plénière. Il s'agit juste de repréciser rapidement la signification des termes *inconnue* et *solution d'une équation*. Nous admettons que ces équations ont une seule solution et pointons la dangereuse similitude avec les égalités valables pour tous les nombres x : « Les mathématiciennes et les mathématiciens utilisent les mêmes lettres et le même signe "=" dans les deux cas mais leurs significations sont très différentes. »

Au cours des échanges, nous faisons au moins une figure ressemblant à celle-ci.



Le bilan est fait à l'aide du bilan CL1 n° 2. Il contient quelques explications concernant l'équation $\frac{9+x}{2}=12$ *et ses solutions, sans résolution experte. Il est distribué sur le même document que l'exercice des deux formules qui suit.*

EXERCICE DES DEUX FORMULES

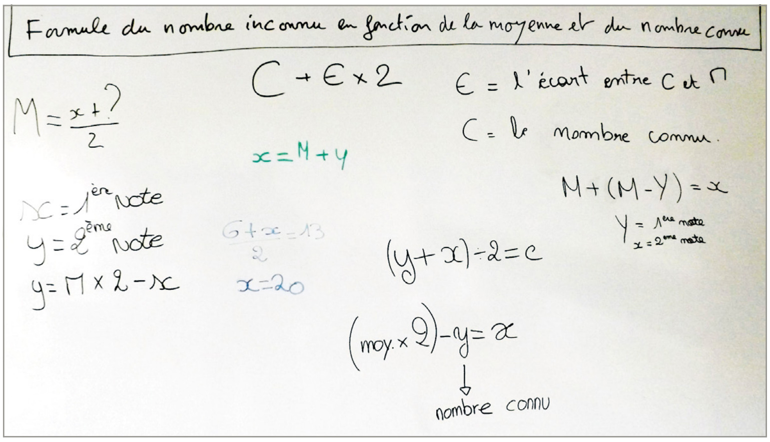
1. Exprimez la moyenne de deux nombres en fonction de ces deux nombres (on demande une formule).
2. On considère deux nombres. Le premier est connu, leur moyenne est connue mais le deuxième est inconnu. Exprimez le nombre inconnu en fonction du nombre connu et de la moyenne des deux nombres (on demande une formule).

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour préciser un peu la forme des formules cherchées : « … = … » avec d'un côté le résultat et de l'autre les nombres qui permettent d'obtenir le résultat. Nous faisons le parallèle avec la formule de l'aire d'un rectangle.

Travail en équipes pour se mettre d'accord sur une ou plusieurs formules pour chaque question. Si certains ont terminé avant, nous leur demandons de trouver une formule similaire à celle de la question 2 dans le cas où il y a deux nombres connus et un nombre inconnu dont nous connaissons la moyenne.

Plénière. Un représentant de chaque équipe écrit sur la gauche du tableau les formules trouvées à la question 1 et sur la droite celles trouvées à la question 2 (voir photo ci-contre).

Nous allons assez vite sur les formules de la question 1. Pour la question 2, nous désignons une formule et demandons si elle est correcte (**travail individuel très bref**). Nous passons ainsi en revue toutes les formules (si personne n'a proposé $x' = 2m - x$, nous le faisons). Elles sont illustrées à l'aide d'abscisses sur une demi-droite.



Exemple de tableau où sont données les formules de la question 2.

© Jean-Philippe Rouquès et Christophe Gragnic

Nous terminons en projetant Moyenne.ggb. Dans ce fichier, seuls les points d'abscisses x et m peuvent bouger. En faisant cela, nous montrons comment x' varie en fonction de x et m. Nous demandons aux élèves quelle commande de GeoGebra nous avons utilisée pour réaliser ce prodige. Il s'agit de la commande « Symétrie centrale ». En effet, le point d'abscisse m est le milieu du segment d'extrémités les points d'abscisses x et x', et celui d'abscisse x' est le symétrique de celui d'abscisse x par rapport à celui d'abscisse m. Nous préparons ainsi l'exercice du trésor (voir étape 1 de la séquence G2, voir p. 122).

1. $m = \dfrac{x + x'}{2}$ où x et x' sont les deux nombres et m la moyenne.
2. Soit x le nombre connu, x' le nombre inconnu et m la moyenne. Alors x' = 2m – x.

Les autres formules obtenues par la classe sont également notées.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Questions du type suivant, sans résolution experte en plénière :
« 0 est-il solution de l'équation 18x + 12 = 28x + 2 ? Si non, devinez une solution de cette équation. »
Idem avec 1869,257 et 4x + 2x = 6x ; avec 2 et $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; avec 5 et 6(x – 3) = 7(x – 3) ;
avec $\frac{3}{7}$ et $\frac{4x + 9}{2} = 2x + 4{,}5$.

CALCULS NUMÉRIQUES AVEC DES ÉCRITURES FRACTIONNAIRES

Lors de l'entraînement technique précédent, nous revenons sur les écritures fractionnaires. Nous posons une à une et au tableau les questions traitées dans le résumé Nombres en écriture fractionnaire qui sera distribué plus tard : **travail individuel très bref, puis plénière** pour chacune.

C'est l'occasion de projeter des calculs de fractions écrits par François Viète (diapositive 6). On retrouve la généralité permise par l'usage des lettres A, B, etc. mais on constate que Viète ne dispose pas encore de symbole pour l'égalité ni pour la multiplication.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Nombres en écriture fractionnaire.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous donnons des calculs similaires à ceux du résumé.

SÉQUENCE 10

Équations du premier degré (CL2)

Au cycle 4, les élèves ont été amenés à tester si une égalité où figure une lettre est vraie. Ils ont découvert la notion d'inconnue et de solution d'une équation. Ils ont résolu des problèmes nécessitant une résolution algébrique d'équation du premier degré. La mise en équation a permis de consolider le travail sur les expressions littérales.

PROGRAMME 2019

Nombres et calculs

Résoudre des problèmes modélisés par des équations [...] se ramenant au premier degré.

Algorithmique et programmation

Variables informatiques de type flottant.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

La séquence CL1 s'est terminée par une automatisation de la notion de solution d'une équation.

– L'**étape 1** de cette séquence vise à réinstaller la méthode de résolution experte d'une équation du premier degré.
– L'**étape 2** est consacrée à des problèmes se ramenant à une équation du premier degré, aux entraînements techniques et à la découverte des variables informatiques de type flottant.

Pour donner du sens lors de la résolution d'une équation, nous disons très souvent : « On obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ. Cela veut dire que les nombres *x* qui vérifient ... = ... sont les mêmes que ceux qui vérifient ... = ... ».

ÉTAPE 1

Résolution experte d'équations du premier degré

Phase de prise en main de notions du collège | 2h30

EXERCICE DE CALCUL MENTAL (PROJETÉ)

1. Je pense à un nombre, je lui ajoute 5 et je trouve 13,5. Quel est ce nombre ?
2. Je pense à un nombre, je lui enlève 1,7 et je trouve 2,4. Quel est ce nombre ?
3. Je pense à un nombre, je le multiplie par 3 et je trouve 2. Quel est ce nombre ?
4. (Question pour les rapides) Je pense à un nombre, je lui ajoute 3, je multiplie le résultat par 5, je retranche 4 au nouveau résultat et je trouve 6. Quel est ce nombre ?

Travail individuel, puis plénière. Une fois résolues, les questions 1, 2, 3 sont écrites sous forme d'équation mais la théorie de la résolution des équations n'est pas encore exposée.

Pour la question 3, nous donnons d'abord la parole à des élèves susceptibles de proposer 0,6, puis 0,7, etc. Quand un élève propose « 0,666… », nous demandons ce que signifient les pointillés. Les élèves ne sachant pas, nous écrivons une grosse formule avec « lim » et « $\sum$ ». Finalement, un élève propose $\frac{2}{3}$! Aucune trace n'est laissée sur le cahier de bord.

EXERCICE DU PREMIER NOMBRE MYSTÈRE

Alice a effectué des opérations sur sa calculatrice. Elle a appuyé sur des touches dont quatre sont inconnues :

$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{(}\ \boxed{7}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{EXE}}$

Le résultat affiché est 665,6. Quelles peuvent être les quatre touches inconnues ?

Travail individuel, puis plénière. Le problème peut être partiellement résolu par essais-erreurs, et complètement résolu en raisonnant sur les opérations réciproques ou en le mettant en équation. La résolution experte de l'équation n'est pas exposée.

Les élèves écrivent le titre de la séquence.

[Sans rédiger] 665,6 ÷ 13 = 51,2 et 51,2 – 7,3 = 43,9. Donc Alice a forcément tapé 43,9.
Remarque : Au lieu de faire les calculs « à l'envers », on aurait pu résoudre l'équation : $13(7{,}3 + a) = 665{,}6$.

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 1

1. Peut-on obtenir 1 avec le programme de calcul suivant ?

```
Multiplier par 7
Enlever 3
Diviser par 8
```

2. (Question pour les rapides) Peut-on obtenir l'opposé du nombre de départ avec ce programme de calcul ?

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Nous demandons d'abord d'expliquer le nom de l'exercice. Puis un élève résout le problème par opérations réciproques et propose 1,571428571. Nous rappelons que lorsque la calculatrice affiche un résultat avec le maximum de chiffres qu'elle peut afficher – ici 10 chiffres – il y a de fortes chances que ce soit une valeur approchée. Un élève donne alors la bonne réponse ($\frac{11}{7}$), ce qui invalide 1,571428571 puisque l'écriture décimale de 1,571428571 × 7 se termine par un 7. Enfin, la résolution experte de l'équation associée est proposée par un élève. Nous reprenons ses explications en introduisant la notion d'équations équivalentes, sans insister.

Méthode 1

Faire les calculs « à l'envers » : donc $\frac{11}{7}$ est le seul nombre de départ qui convient. $? \xrightarrow{\times 7} ? \xrightarrow{-3} ? \xrightarrow{:8} 1$

Méthode 2

Résoudre l'équation $\frac{7x-3}{8} = 1$. $\frac{11}{7} \xleftarrow{:7} 11 \xleftarrow{+3} 8 \xleftarrow{\times 8} 1$

EXERCICE DU DEUXIÈME NOMBRE MYSTÈRE

Ahmed et Cécile ont chacun une calculatrice. Ils ont « tapé » le même nombre.
Puis Ahmed a appuyé sur les touches :

$\boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{\text{EXE}}$

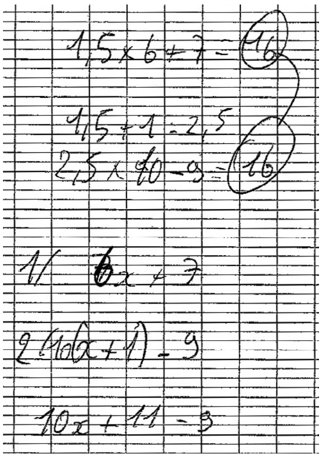
et Cécile a appuyé sur les touches :

$\boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{-}\ \boxed{9}\ \boxed{\text{EXE}}$

1. Le résultat final d'Ahmed est le même que celui d'Alice : quel nombre ont-ils bien pu taper ?
2. (Question pour les rapides) Le résultat final d'Ahmed est l'opposé de celui d'Alice : quel nombre ont-ils bien pu taper ?

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour parler de l'influence du premier EXE du calcul de Cécile. On reparle de la mémoire « dernier calcul effectué » (Ans ou Rép) de la calculatrice (voir AP1, étape 1 p. 188). Si certains devinent que 1,5 est solution, ils n'ont pas pour autant résolu le problème car vu la manière dont l'énoncé est rédigé, il faut trouver toutes les solutions.

Travail en équipes, puis plénière. Nous projetons un extrait de cahier de recherche comme ci-dessous.



L'élève concerné explique qu'il a trouvé 1,5 en tâtonnant. Mais le problème n'est pas résolu car il pourrait y avoir d'autres solutions. Il commente ensuite les deux expressions littérales qu'il a écrites, en expliquant ce que représente x et d'où viennent les parenthèses. Un autre élève prend le relais et explique que, comme Ahmed et Cécile ont obtenu le même résultat, on a $6x + 7 = 10(x + 1) - 9$.

Nous projetons ensuite un cahier de recherche avec une résolution experte. Comme lors de toutes les résolutions qui vont suivre, nous disons : « On obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ. Cela veut dire que les nombres x qui vérifient … = … sont les mêmes que ceux qui vérifient … = … ».

Il est rappelé qu'on peut avoir comme stratégie de regrouper les termes en x dans un membre et les constantes dans l'autre. La solution de l'équation $4x = 6$ peut être obtenue en divisant par 4 ou en disant directement que $\frac{6}{4}$ est la seule solution (vu au collège).

Puis nous passons aux premières utilisations : **travail individuel très bref** pour résoudre chaque équation et donner l'ensemble des solutions : $x+4=7$; $3x+8=2x$; $3-x=x$; $\frac{x}{10}=20$; $5+x=7+4x$ …

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Équations du premier degré.

Un ou deux extraits de cahiers de recherche sont collés, l'un au moins avec une résolution experte correcte. Les élèves ajoutent des commentaires, notamment :
Les équations suivantes ont les mêmes solutions que l'équation $6x + 7 = 10(x + 1) - 9$.

EXERCICES AVEC DES ÉQUATIONS

Exercice 1

1. Calculez $6x + 2$ pour $x = \frac{1}{6}$, puis calculez $18x$ pour $x = \frac{1}{6}$.
2. Déduisez des résultats de la question 1 que $\frac{1}{6}$ est solution de l'équation $6x + 2 = 18x$.
3. Est-ce la seule solution ?

Exercice 2

1. Calculez $\frac{x}{3} + x$ pour $x = 0{,}75$.
2. Déduisez du résultat de la question 1 que 0,75 est solution de l'équation $\frac{x}{3} + x = 1$.
3. Est-ce la seule solution ?

Exercice 3

Complétez le tableau en écrivant pour chaque équation l'ensemble de ses solutions.

ÉQUATION	$4x + 5 = 2(2x + 1)$	$3x - 6 = 3(x - 2)$	$x^2 = 36$
Ensemble des solutions	S =	S =	S =
Explications			

Les exercices sont donnés un par un. **Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière**.

Exercices 1 et 2. Résoudre l'équation permet de savoir si la solution donnée par l'énoncé est la seule. Nous parlons de l'ensemble des solutions dans les questions 2 et 3. L'équation de l'exercice 2 est résolue de deux manières : en multipliant les deux membres par 3 et en réduisant l'expression de gauche au même dénominateur.

Exercice 3. Une fois arrivés à $4x + 5 = 4x + 2$ ou $3x - 6 = 3x - 6$, inutile de continuer les calculs : il suffit de dire qu'ajouter 5 ne peut jamais donner le même résultat qu'ajouter 2 ou que les deux membres sont toujours égaux.
Il a été admis en début d'année que pour $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exercice 1

2. … $\frac{1}{6}$ est solution de l'équation, donc $\frac{1}{6} \in S$.

3. … $\frac{1}{6}$ est la seule solution de l'équation, donc $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Exercice 2

3. Méthode 1 : Multiplier par 3 les deux membres… Méthode 2 : Réduire au même dénominateur…

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous demandons aux élèves de résoudre des équations du premier degré similaires et de donner, en conclusion, l'ensemble des solutions.

ÉTAPE 2

Problèmes se ramenant à une équation du premier degré

Phase de prise en main de notions du collège | ⏱ 2 heures

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 26 ET DE 27

Voici un programme Python :

```
def f(a):
  b = a + 2
  c = 5 * b
  d = c - a
  return d

print("Saisir un nombre")
x = int(input())
print(f(x))
```

1. Éditez ce programme sur Brython.info, puis exécutez-le plusieurs fois.
2. Quel nombre l'utilisateur du programme peut-il saisir pour que le nombre affiché à la fin de l'exécution soit 26 ?
3. Même question en remplaçant 26 par 27.

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Le lien avec les équations correspondantes est fait. 27 ne peut pas s'afficher car le programme attend que l'utilisateur saisisse un nombre entier alors que la seule solution de l'équation $5(a + 2) - a = 27$ est 4,25. Pour introduire les variables de type flottant, nous commençons par écrire le programme suivant.

```
print("saisir un nombre")
x = int(input())
y = x * 10
print(y)
```

Nous l'exécutons en saisissant « 0.36 ». Un message d'erreur s'affiche. Nous l'analysons et expliquons alors que pour faire des calculs avec des nombres non entiers, le type « int » ne convient pas. Nous remplaçons « int » par « float » et cette fois-ci le programme n'émet pas d'erreur, mais n'affiche pas « 3.6 » pour autant, seulement un résultat approché. Nous donnons alors quelques détails techniques sur le type « float » de Python : « Le type float (nombre à virgule flottante en français) est utilisé en informatique pour représenter des nombres décimaux avec une certaine précision. Cette précision suffit en général pour les ingénieurs (assez de chiffres significatifs et assez de chiffres après la virgule) mais pas pour les mathématiciennes et les mathématiciens (impossibilité de représenter certains nombres non décimaux). De plus, certaines opérations ne sont pas exactes comme par exemple 0.36*10. »

2. Le nombre 26 s'affiche à condition que le nombre saisi soit solution de l'équation $5(a + 2) - a = 26$.
Comme 4 est la seule solution de cette équation, 26 s'affiche à condition qu'on saisisse 4.
3. Il n'y a aucun moyen que 27 s'affiche car le programme attend que l'utilisateur saisisse un nombre entier alors que la seule solution de l'équation $5(a + 2) - a = 27$ est 4,25. Il faudrait remplacer « `x = int(input())` » par « `x = float(input())` ».

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 3

Voici un programme Python. Grâce à l'instruction `x = float(input())`, l'utilisateur peut saisir un nombre décimal.

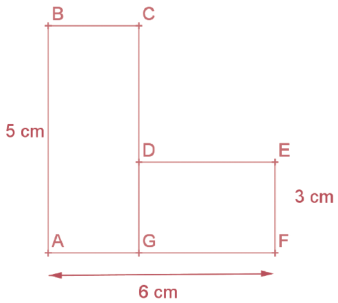
```
def f(a):
  b = a-1
  c = b/7
  d = c + 2*a
  return d

print("Saisir un nombre")
x = float(input())
print(f(x))
```

1. Éditez ce programme sur Brython.info puis exécutez-le plusieurs fois.
2. Quel nombre l'utilisateur du programme peut-il saisir pour que le nombre affiché à la fin de l'exécution soit 5 ?

Le protocole est similaire.

EXERCICE DES DEUX RECTANGLES

Voici une figure représentant deux rectangles $ABCG$ et $DEFG$ accolés.

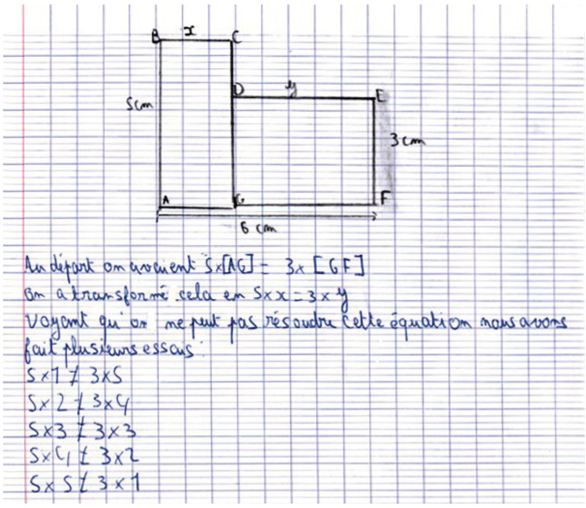


Le point G est sur le segment $[AF]$.
Existe-t-il des positions du point G telles que les deux rectangles aient la même aire ? Justifiez.

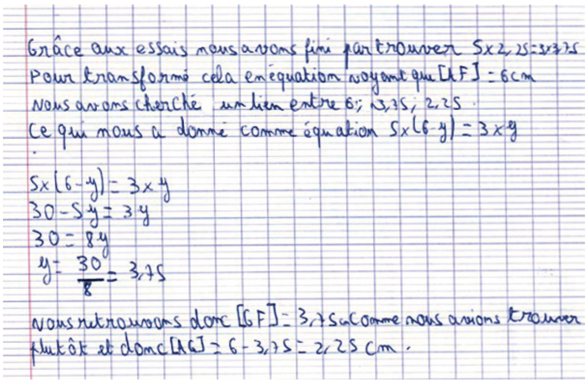
Les élèves lisent l'énoncé et font part de leurs questions. Pour illustrer le problème, nous faisons varier la position de G sur Deux_rectangles.ggb.

Travail individuel, puis en équipes. Une fois les discussions terminées au sein d'une équipe, les élèves écrivent une production commune qui relate les différentes étapes par lesquelles ils sont passés. Ceux qui ont terminé doivent résoudre une deuxième fois l'exercice, en changeant d'inconnue.

Plénière. Les productions (voir exemple ci-dessous) sont projetées et discutées. À la fin, nous insistons sur les quatre étapes de la résolution d'un problème par mise en équation :
– choix de l'inconnue ;
– détermination d'une équation dont l'inconnue est solution ;
– résolution de l'équation ;
– réponse au problème de départ.



Au départ on avaient 5×[AG] = 3×[GF]
On a transformé cela en 5×x = 3×y
Voyant qu'on ne peut pas résoudre cette équation nous avons fait plusieurs essais
$5\times1 \neq 3\times5$
$5\times2 \neq 3\times4$
$5\times3 \neq 3\times3$
$5\times4 \neq 3\times2$
$5\times5 \neq 3\times1$


Grâce aux essais nous avons fini par trouver 5×2,25=3×3,75
Pour transformé cela en équation voyant que [AF] = 6cm
Nous avons cherché un lien entre 6; 3,75; 2,25
Ce qui nous a donné comme équation 5×(6−y) = 3×y
$5\times(6-y) = 3\times y$
$30-5y = 3y$
$30 = 8y$
$y = \frac{30}{8} = 3{,}75$
Nous retrouvons donc [GF] = 3,75 cm comme nous avions trouver plutôt et donc [AG] = 6 − 3,75 = 2,25 cm.

Nous faisons également un rappel historique concernant l'apport de René Descartes (1596-1650) pour résoudre ce genre de problèmes. C'est lui qui a créé un pont entre la géométrie et l'algèbre, lui qui le premier a transformé des problèmes de géométrie en problèmes sur des nombres.

Une ou deux productions d'équipes annotées sont collées.

EXERCICE DE L'ÂGE INCONNU (AU TABLEAU)

Dans 15 ans, j'aurai le double de l'âge que j'avais il y a 19 ans.
Quel est mon âge ?
Résolvez ce problème en le mettant en équation.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Un élève propose de prendre l'âge actuel comme inconnue. Nous disons aux élèves qui ont deviné la solution en tâtonnant que ce problème peut certes être résolu ainsi, mais que nous attendons une résolution à l'aide d'une équation dans le but de travailler les équations.

Travail en équipes, puis plénière. Des cahiers de recherche sont projetés. En fin de plénière, nous projetons d'autres problèmes du même genre (**travail personnel avec entraide** pour les trois problèmes à la fois) :
– J'ai deux sœurs jumelles. Elles ont 3 ans de moins que moi. À nous trois, nous avons 99 ans. Quel est mon âge ?
– Dans 30 ans, j'aurai le triple de l'âge que j'avais il y a 20 ans. Quel est mon âge ?
– (Question pour les rapides) Un homme de 76 ans dit à son fils : « J'ai le double de l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. » Quel est l'âge actuel du fils ?

Le bilan est fait à partir du bilan CL2 n° 1 ci-dessous.

Exemple de résolution d'un problème par mise en équation

Problème : « Dans 15 ans, j'aurai le double de l'âge que j'avais il y a 19 ans. Quel est mon âge ? »
Choix de l'inconnue : Mon âge en année, noté x.
Équation dont x est solution : $x + 15 = 2(x - 19)$
Résolution de l'équation : $x + 15 = 2x - 38$; $x + 53 = 2x$; $53 = x$
Conclusion : J'ai 53 ans.

ENTRAÎNEMENT DE CALCUL LITTÉRAL N° 2

Attention ! La première fois, ne traitez que les questions Série 1-1 ; Série 2-1 ; Série 2-2 ; Série 3-1 au verso de cette feuille. Les fois suivantes, vous aurez d'autres questions à traiter, à la suite des premières.

Série 1

1. a. Calculez $2x + 4$ pour $x = 0{,}4$ puis calculez $7x + 2$ pour $x = 0{,}4$.
b. Déduisez des résultats de la question a. que 0,4 est solution de l'équation $2x + 4 = 7x + 2$.
c. Est-ce la seule solution ?
2. a. Calculez $5 + \frac{3x}{4}$ pour $x = 8$.
b. Déduisez des résultats de la question a. que 8 est solution de l'équation $5 + \frac{3x}{4} = 11$.
c. Est-ce la seule solution ?
3. a. Calculez $3 - (1 - 2x)$ pour $x = 0$, puis calculez $2(x + 1)$ pour $x = 0$.
b. Déduisez des résultats de la question a. que 0 est solution de l'équation $3 - (1 - 2x) = 2(x + 1)$.
c. Est-ce la seule solution ?

Série 2

Résolvez les équations suivantes d'inconnue x. En guise de conclusion, donnez l'ensemble S de leurs solutions.

1. $5x = 3x + 13$
2. $3x + 1 = 3$
3. $5(x - 4) = 2(x + 0{,}5)$
4. $2 + \frac{x}{7} = 5 - x$
5. $2 - (x - 1) = 3(2 + 3x) + 1$
6. $4 - 2(x + 1) = 7 - (1 + 2x)$

Série 3

Résolvez les problèmes suivants en les mettant en équation. Pour chacun, indiquez clairement les quatre étapes de la résolution :
a. Choix de l'inconnue ;
b. Détermination d'une équation dont l'inconnue est solution ;
c. Résolution de l'équation ;
d. Réponse au problème de départ.

1. Mon père a le double de mon âge. À nous deux, nous avons 75 ans. Quel est mon âge ?
2. La somme de trois nombres entiers consécutifs vaut 1 782. Quel est le plus petit de ces nombres ?
3. Une mère de 52 ans a trois enfants. Le second a 2 ans de plus que le plus jeune.
L'aîné a 5 ans de plus que le plus jeune. À eux trois, les enfants ont le même âge que la mère.
Quel est l'âge du plus jeune ?
4. $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 31{,}8$ cm. Son périmètre est de 151 cm.
Déterminez la longueur BC.
5. Un père pèse 44 kg de plus que son fils. À eux deux, ils pèsent 100 kg. Quel est le poids du fils ?
6. Ma mère a 3 ans de plus que mon père et 27 ans de plus que moi. À nous trois, nous avons 72 ans.
Quel est mon âge ?

L'énoncé, de format A4, occupe la première page d'une feuille A3 pliée en deux. Nous utilisons le protocole des « séries d'exercices avec allers-retours » (voir p. 45).

SÉQUENCE 11

Expressions du second degré, expressions fractionnaires (CL3)

Au cycle 4, la distributivité simple a été utilisée pour factoriser une somme ou une différence. Les élèves ont abordé la double distributivité et la factorisation de $a^2 - b^2$. Cette dernière a été utilisée pour résoudre des équations en se ramenant à des équations produits. Les élèves ont aussi abordé les équations de la forme $x^2 = a$. Ils ont traité des problèmes internes aux mathématiques ou venant d'autres disciplines par mise en équation.

PROGRAMME 2019

Nombres et calculs

– Développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.
– Résoudre des problèmes modélisés par des équations [...] se ramenant au premier degré.
– Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.
– Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
– Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée et réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
– Démonstrations : illustration géométrique de $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; la somme de deux multiples de a est un multiple de a ; le carré d'un nombre impair est impair ; le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Fonctions

– Résoudre une équation [...] produit ou quotient [...].
– Les outils numériques sont mis à profit : Python, le tableur ou la calculatrice, pour mettre en évidence l'aspect de programme de calcul.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Tout au long de la séquence, la structure et le vocabulaire des expressions sont approfondis à l'aide d'exercices et du Club des expressions afin de donner du sens aux notions étudiées.
– L'**étape 1** vise à réinstaller la notion de double distributivité avec l'exercice des multiplications, faisant l'objet d'une démonstration utilisant le calcul littéral.
– L'**étape 2** est consacrée aux trois identités remarquables, y compris $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ vue au collège. La démonstration géométrique au programme de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est faite. L'exercice de l'échelle et l'exercice des deux carrés permettent d'aborder les équations du second degré se ramenant à des équations du premier degré. L'étape se termine par les deux démonstrations : « Le carré d'un nombre impair est impair » et « $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ».
– L'**étape 3** permet d'approfondir la notion de factorisation et d'équation produit à travers la recherche d'antécédents d'une fonction du second degré, introduite par un programme de calcul. Python est utilisé et le problème de l'exactitude des calculs est travaillé. Diverses méthodes de factorisation sont vues dans le but de résoudre des équations du second degré. Les élèves découvrent et résolvent des équations quotient simples. La démonstration au programme « La somme de deux multiples de a est un multiple de a » est faite.

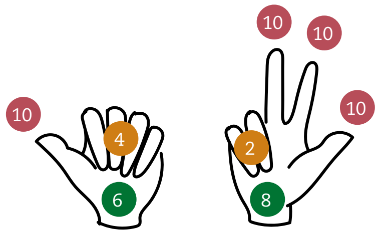
ÉTAPE 1

Expressions du second degré, double distributivité

Phase de prise en main de notions du collège | ⏱ 1h15

EXERCICE DES MULTIPLICATIONS

On a vu une méthode de calcul des produits de deux nombres entiers compris entre 5 et 10.
Voici une illustration de cette méthode pour le produit de 6 par 8.
Démontrez, à l'aide d'un calcul littéral, que cette méthode fonctionne toujours.



$$10 + 10 + 10 + 10 = 40$$
$$+$$
$$4 \times 2 = 8$$
$$\downarrow$$
$$6 \times 8 = 48$$

Nous consacrons une séance entière à cet exercice. Nous annonçons : « Bonne nouvelle pour ceux qui ne connaissent pas les tables de multiplication entre 5 × 5 et 10 × 10 car vous aurez désormais une méthode pour les retrouver ! Je vais vous présenter cette méthode, puis vous la validerez à l'aide d'un calcul littéral, calcul qui est l'objectif principal de cette séance. » La méthode en question est expliquée dans une vidéo en ligne (dans un moteur de recherche, tapez « Astuce math connaître ses tables de multiplication sans les apprendre[11] »). Nous expliquons nous-mêmes la méthode sur l'exemple 6 × 8, sans montrer la vidéo. L'égalité 6 × 8 = 4 × 10 + 4 × 2 restera au tableau pendant toute la séance (diapositive 1). Puis les élèves essayent eux-mêmes avec 7 × 9.

Nous demandons ensuite quelles variables pourraient être choisies pour faire la démonstration (**travail individuel très bref**). Deux suggestions sont données : les nombres de doigts levés sur chaque main ou bien les deux nombres de départ. Nous proposons de commencer par les nombres de doigts levés car c'est plus intéressant mathématiquement ; la deuxième proposition sera testée par ceux qui finiront avant les autres. Ensuite, **travail individuel** pour trouver une stratégie, puis **plénière**. La stratégie suivante émerge et est finalement projetée.

Nous proposons le plan de la démonstration suivant.
On note m le nombre de doigts levés d'une main et n le nombre de doigts levés de l'autre.
1. Exprimez en fonction de m et n le résultat du calcul avec les doigts.
2. Exprimez en fonction de m et n le résultat de la multiplication.
3. Démontrez que ces deux résultats sont égaux pour n'importe quelles valeurs de m et n.

Travail individuel entrecoupé par une éventuelle **plénière de régulation** pour faire émerger le début de la première expression : $(m + n) \times 10$. Éventuellement, une **deuxième plénière de régulation** pour :
– mettre les élèves sur la piste de l'expression, pour une main donnée, du nombre de doigts baissés en fonction du nombre de doigts levés – nous cachons une main derrière notre dos, disons que nous avons deux doigts levés et demandons le nombre de doigts baissés ;
– aider ceux qui n'arrivent pas à exprimer les nombres à multiplier en fonction de m et n – nous montrons une main avec un doigt levé et demandons quel nombre cela représente.

Au cours d'une nouvelle **plénière de régulation**, les expressions $10(m + n) + (5 - m)(5 - n)$ et $(5 + m)(5 + n)$ sont données et écrites au tableau. Puis il émerge que pour montrer qu'elles sont équivalentes, il faut les développer par double distributivité.

11 Lien direct : youtube.com/watch?v=y_osFnhFXKw

Travail individuel avec entraide pour finir, en commençant par développer la deuxième expression. Ceux qui ont terminé font une deuxième démonstration en prenant les deux nombres de départ comme variables. Si besoin, nous les aidons à faire les premiers pas vers le fait que cela revient à démontrer que $pq = 10(p - 5 + q - 5) + (10 - p)(10 - q)$ pour tout p et q entre 0 et 5.

Plénière. Nous projetons un cahier de recherche. Les élèves décrivent les méthodes vues au collège pour développer $(5 + m)(5 + n)$. Ils échangent ensuite autour du développement de $(5 - m)(5 - n)$. La méthode qui consiste à se ramener à $(5 + (- m))(5 + (- n))$ est exposée. Les élèves exposent oralement des moyens mnémotechniques utilisant la règle des signes.

Une fois la démonstration finie, nous passons aux premières utilisations du développement par double distributivité : développer $(x + 2)(x + 3)$, puis $(x - 2)(x - 4)$, puis $(x - 2)(x + 5)$, puis $(2x + 2)(x + 6)$… Les élèves collent le texte Règle de double distributivité dans la section « Calcul littéral » du cahier de résumés.

Les élèves écrivent le titre de la séquence.
Le bilan est fait à partir du bilan CL3 n°1 contenant la résolution avec comme variables les nombres de doigts levés de chaque main. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan et l'exercice de la fonction affine qui suit.

EXERCICE DE LA FONCTION AFFINE

Démontrez que la fonction qui correspond au programme de calcul ci-dessous est une fonction affine.

```
Doubler
Retirer 3
Multiplier par la somme de 4 et du nombre de départ
Retirer le double du carré du nombre de départ
```

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

Traces de l'exercice qui se terminent par :
La fonction $x \longmapsto 5x - 12$ est affine car elle correspond au programme de calcul : multiplier par 5, ajouter $- 12$.

EXERCICE : SÉRIE CL3-1 (CLUB DES EXPRESSIONS)

Reconstituez les huit premières expressions (la dernière est un défi).

1. x^2	**4.** $(a - b)^2$	**7.** $(5 + m)(5 + n)$
2. $(a + b)^2$	**5.** $3x^2$	**8.** $(x - 2)(x + 3)$
3. $a^2 + b^2$	**6.** $(3x)^2$	**9.** $10(m + n) + (5 - m)(5 - n)$

Travail à la maison, puis plénière. La série est faite à l'aide du vidéoprojecteur. Nous revenons sur certaines conventions d'écriture.

Description de quelques expressions du second degré

$(a + b)^2$ est le carré de la somme de a et b.
$a^2 + b^2$ est la somme du carré de a et du carré de b.
$3x^2$ est le produit de 3 par le carré de x.
$(3x)^2$ est le carré du produit de 3 par x.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous donnons des exercices de développements par double distributivité.

ÉTAPE 2

Identités remarquables

Phase de prise en main pour $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | Phase d'élaboration pour $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | ⏱ 2 h 30

DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS

Travail individuel très bref pour calculer mentalement 100^2, puis **plénière**. C'est l'occasion de reparler rapidement des puissances de 10 et des règles de calcul sur les puissances.

Travail individuel très bref pour calculer mentalement 98×102 puis **plénière**. Des élèves y arrivent en calculant $98 \times 100 + 98 \times 2$ mais la plupart en sont incapables. Nous écrivons alors un indice au tableau : $98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$. Un élève rappelle l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Elle est écrite au tableau, puis les élèves l'utilisent pour faire le calcul mental demandé (**travail individuel très bref**). Nous recommençons avec 99×101, 1002×998 et 51×49.

Travail individuel très bref pour démontrer l'identité remarquable précédente, puis **plénière**. Un cahier de recherche est projeté. Nous passons aux premières utilisations, uniquement dans le sens développement : $(x - 2)(x + 2)$; $(3x - 4)(3x + 4)$; etc.

Identité remarquable

Pour tous a et b, on a : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Par exemple, pour tout x, on a $(3x + 4)(3x - 4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$.

CARRÉ D'UNE SOMME

Les questions suivantes sont projetées une par une : **travail individuel très bref**, puis **plénière**.
- Vrai ou faux : le double de la somme de deux nombres est toujours égal à la somme du double du premier et du double du second.
- Vrai ou faux : le double de la différence de deux nombres est toujours égal à la différence entre le double du premier et le double du second.
- Vrai ou faux : le carré de la somme de deux nombres est toujours égal à la somme du carré du premier et du carré du second.

Question 1. Nous donnons la parole à un élève qui s'est contenté de vérifier sur un exemple… L'égalité est illustrée à l'aide du calcul de l'aire d'un rectangle de côtés 2 et $a + b$.
Question 3. Un élève dit que c'est vrai, puis un autre propose un contre-exemple. Nous insistons sur le fait qu'en général, le carré d'une somme n'est pas égal à la somme des carrés. Dans la suite, nous le répéterons à chaque occasion. Nous disons enfin qu'il existe une identité remarquable qui donne une expression intéressante de $(a + b)^2$.

Travail individuel pour trouver l'identité remarquable et la démontrer, puis **en équipes**, puis **plénière**. Une démonstration algébrique est donnée (si un élève a trouvé une démonstration géométrique pour a et b strictement positifs, nous lui demandons de garder provisoirement le silence). Puis nous passons aux premières utilisations dans le sens développement : $(x + 10)^2$; $(6 + x)^2$; $(3x + 4)^2$; etc. puis dans le sens factorisation : $x^2 + 2x + 1 = (\ldots + \ldots)^2$; $x^2 + 10x + 25 = (\ldots + \ldots)^2$.

ILLUSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exercice (projeté)
Soit a et b deux nombres strictement positifs.
1. Faites une figure à main levée d'un carré dont chaque côté est constitué d'un segment de longueur a et d'un segment de longueur b mis bout à bout.
2. Calculez l'aire de ce carré de deux manières différentes. Que peut-on en déduire ?

Les questions sont projetées une par une au tableau : **travail individuel, puis en équipes, puis plénière**. Une fois la démonstration établie, **travail individuel très bref** pour comparer $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$.

Le document Démonstration géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est collé dans le cahier de résumés.
Le bilan est fait à partir du bilan CL3 n° 2 contenant un résumé de ce qui vient d'être vu sur le carré d'une somme, notamment l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Il contient une erreur ($(5x)^2 = 5x^2$) à corriger par les élèves.

À l'aide du diaporama (diapositives 2 et 3), nous présentons *Les Éléments* d'Euclide et montrons que, dans la proposition 4 du livre II (diapositive 4), Euclide avait déjà connaissance de cette identité remarquable et de son interprétation géométrique.

CARRÉ D'UNE DIFFÉRENCE

Les questions suivantes sont projetées une par une au tableau.
- Vrai ou faux : le carré du produit de deux nombres est toujours égal au produit du carré du premier par le carré du second.
- Vrai ou faux : le carré du quotient de deux nombres est toujours égal au quotient du carré du premier par le carré du second.
- Vrai ou faux : le carré de la différence entre deux nombres est toujours égal à la différence entre le carré du premier et le carré du second.

Le protocole est similaire. Les démonstrations des questions 1 et 2 sont faites au tableau. La question 1 utilise le fait qu'un produit de plusieurs nombres peut être calculé dans n'importe quel ordre. À la fin de la plénière de la question 3, nous donnons quelques premières utilisations de l'identité remarquable associée, dans les deux sens. Nous disons aux élèves que les trois identités remarquables doivent être apprises par cœur.

Carré d'une différence (identité remarquable)

Pour tous a et b, on a : $\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Par exemple, pour tout x, on a $(7x - 8)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 8 + 8^2 = 49x^2 - 112x + 64$.
Sur la page « Calcul littéral » du cahier de résumés, les élèves écrivent les trois identités remarquables sous le titre « Identités remarquables ».

EXERCICE DE LA FONCTION PEUT-ÊTRE AFFINE

La fonction associée au programme de calcul suivant est-elle affine ?

```
Retirer 1
Mettre au carré
Retirer le carré du nombre de départ
Ajouter le double du nombre de départ
```

Travail à la maison, puis travail en équipes, puis plénière. Nous encourageons les élèves qui utilisent la double distributivité à utiliser les identités remarquables.

Traces de l'exercice incluant la phrase :
La fonction $x \longmapsto 1$ est affine car elle correspond au programme de calcul : multiplier par 0, ajouter 1.

EXERCICE : SÉRIE CL3-2 (CLUB DES EXPRESSIONS)

1. $5x^2$	**4.** $(-x)^2$	**7.** $a^2 + 2ab + b^2$
2. $-x^2$	**5** $x^2 - 4^2$	**8.** $a^2 - 2ab + b^2$
3. $(x-4)^2$	**6.** $(a-b)(a+b)$	**9.** $(x-1)^2 - x^2 + 2x$

Travail à la maison, puis plénière. La série est faite à l'aide du vidéoprojecteur. Nous revenons sur certaines conventions d'écriture.

ENTRAÎNEMENT DE CALCUL LITTÉRAL N° 3

Au verso de cette même feuille, traitez les questions Série 1-1 ; Série 2-1 ; Série 2-2 ; Série 3-1 ; Série 4-1 ; Série 5-1. N'en faites pas plus pour le moment (ou bien sur un brouillon que vous ne rendrez pas).
Dans toute la suite, x désigne un nombre quelconque.

Série 1 : Développement d'une expression par double distributivité
Développez et réduisez les expressions suivantes.
1. $(3x + 2)(x + 1)$
2. $1 + (x - 4)(2x - 1)$
3. $(x - 2)(x + 8) + x^2$
4. $(x - 3)(2x - 4) - x$
5. $x^2 - (x - 6)(2x + 3)$

Série 2 : Développement d'une expression à l'aide d'identités remarquables
Développez et réduisez les expressions suivantes en utilisant des identités remarquables.
1. $4 + (x + 1)(x - 1)$
2. $1 + (x + 3)^2$
3. $(x - 10)^2 + 100$
4. $(x + 4)^2 + (x - 4)^2$
5. $(3x - 5)(3x + 5) + x^2$
6. $2(5x + 6)^2 - (5x - 4)$

Série 3 : Simplification d'un programme de calcul
Pour chacun des programmes de calcul suivants :
a. donnez l'expression d'arrivée si x est le nombre de départ ;
b. simplifiez l'expression d'arrivée ;
c. donnez un programme de calcul équivalent au programme de départ, mais plus simple.

1. Ajouter 2 – Mettre au carré – Retirer le quadruple du nombre de départ.
2. Retirer 3 – Mettre au carré – Retirer le carré du nombre de départ.
3. Tripler – Retirer 1 – Mettre au carré – Retirer 1 – Ajouter le produit de 6 et du nombre de départ.
4. Retirer 4 – Multiplier par la somme du nombre de départ et de 3 – Ajouter 12.

Série 4 : Gymnastique autour des identités remarquables
Parmi les trois expressions suivantes, une seule a été obtenue en développant une expression du premier degré à l'aide d'une identité remarquable. Dites laquelle et précisez l'expression de départ.

1. $x^2 + x + 1$	$x^2 + 2x + 1$	$x^2 + 2x - 1$
2. $x^2 + 6x - 9$	$x^2 - 6x + 1$	$x^2 - 6x + 9$
3. $4x^2 + 6x + 9$	$4x^2 + 24x + 9$	$4x^2 + 12x + 9$
4. $9x^2 - 15x + 25$	$9x^2 - 30x + 25$	$9x^2 - 6x + 25$
5. $4x^2 + 36$	$4x^2 + 12x + 36$	$4x^2 - 36$

Série 5 : Encore de la gymnastique autour des identités remarquables
Complétez.
1. $x^2 + 4x + 4 = (\ldots\ldots\ldots)^2$
2. $x^2 - 10x + 25 = (\ldots\ldots\ldots)^2$
3. $4x^2 - 81 = (\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots)$
4. $49x^2 - 84x + 36 = (\ldots\ldots\ldots)^2$
5. $(5 - 2x)^2 - 1 = (\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots)$

Série 6 : Résolution d'équation
Résolvez les équations suivantes d'inconnue y en commençant par développer ce qui peut l'être.
Terminez en donnant l'ensemble S des solutions de l'équation.
1. $(y + 3)^2 = y^2$
2. $(2y + 1)^2 = (2y - 1)^2$
3. $(y - 2)(y + 2) = (y - 4)(y + 4)$
4. $(2y + 3)(5y + 1) - 10y^2 = 0$
5. $(1 - 2y)(3 + 4y) + 8y^2 = 1$

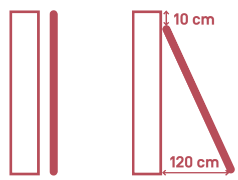
L'énoncé, de format A4, occupe la première page d'une feuille A3 pliée en deux. Nous utilisons le protocole des séries d'exercices avec allers-retours (voir p. 45). Avant de distribuer l'énoncé, nous donnons un exercice du type de ceux de la série 3. Nous ne donnons à faire les questions de la série 6 qu'après avoir fait l'exercice de l'échelle qui suit.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous posons des questions similaires à celles des séries 1, 2 et 5.

EXERCICE DE L'ÉCHELLE

Lorsqu'elle est rangée verticalement, une échelle atteint le haut d'un mur.
Lorsqu'on écarte le pied de l'échelle de 1 m 20, le haut de l'échelle est à 10 cm du haut du mur.
1. Quelle est la longueur de l'échelle ?
2. (Question pour les rapides) La somme des carrés de cinq entiers positifs consécutifs vaut 1 584 855. Quels sont ces entiers ?



Échelle rangée
Échelle en service

Travail individuel entrecoupé par une éventuelle **plénière de régulation** pour qu'émerge l'idée de prendre la longueur de l'échelle comme inconnue et d'appliquer le théorème de Pythagore.

Traces de l'exercice incluant la phrase :
L'équation $l^2 = (l - 10)^2 + 120^2$ est équivalente à une équation du premier degré.

EXERCICE DES DEUX CARRÉS

Résolvez le problème suivant en le mettant en équation.
Deux architectes discutent des plans d'une cour carrée. Le premier dit au deuxième : « C'est dommage que cette cour carrée soit si petite ! Si on rallongeait chaque côté de seulement 2 m, on gagnerait 100 m² de surface ! »
Quelles sont les dimensions de la cour ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

Soit x le côté de la cour. On a $(x + 2)^2 = x^2 + 100$… Donc le côté de la cour est de 24 m.

DEUX DÉMONSTRATIONS LIÉES AUX IDENTITÉS REMARQUABLES

LE CARRÉ D'UN NOMBRE IMPAIR EST UN NOMBRE IMPAIR

Plénière de démonstration
Question : Sous quelle forme peut s'écrire un nombre pair ?
Question : Sous quelle forme peut s'écrire un nombre impair ?
Question : Soit k un entier naturel. Développez $(2k + 1)^2$ et en déduire que $(2k + 1)^2$ est un nombre impair.
$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
C'est la somme d'un nombre pair et de 1, donc c'est un nombre impair. CQFD

$\sqrt{2}$ EST UN NOMBRE IRRATIONNEL

Plénière de démonstration

Nous allons raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Question : Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ?
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction irréductible.

Il existe deux entiers p et q tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p et q n'ayant aucun diviseur commun positif autre que 1.
Question : Montrez que p^2 est pair.
En élevant au carré, on a : $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$. Puis en multipliant chaque membre par q^2, on a $p^2 = 2q^2$.
Question : Montrez que p est pair.
On a démontré que l'implication « si un nombre est impair alors son carré est impair » est vraie.
La contraposée de cette implication – « si le carré d'un nombre est pair alors ce nombre est pair » – est vraie.
Or p^2 est pair, donc p est pair, donc il existe un nombre entier k tel que $p = 2k$.
L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient donc $4k^2 = 2q^2$.
Question : Montrez que q est aussi pair.
En divisant chaque membre par 2, on a $2k^2 = q^2$. Donc q^2 est pair et, d'après la contraposée précédente, q est pair.
Question : Conclure.
On a démontré que p et q sont pairs donc ils ont pour diviseur commun positif 2, ce qui est absurde car $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. Il est donc absurde de supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel. CQFD

Les démonstrations Le carré d'un nombre impair est un nombre impair et $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel sont collées dans le cahier de résumés.

ÉTAPE 3

Équations produit, équations du second degré, équations quotient et factorisation

Phase de prise en main pour les équations produit | Phase d'élaboration pour les équations quotients | ⏱ 3 heures

Nous ne commençons cette étape qu'une fois l'entraînement de calcul littéral n° 3 (étape 2 de cette séquence) terminé, de manière à laisser un peu de temps avant l'entraînement de calcul littéral n° 4 (fin de cette étape 3).

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 100

Voici un programme de calcul :

```
Multiplier par 128
Enlever 695
Doubler
Multiplier par le nombre de départ
Ajouter 1856
```

Soit f la fonction correspondant à ce programme.
Déterminez deux antécédents de 100 par la fonction f.

Travail individuel entrecoupé par des plénières de régulation. Lors de la **première plénière de régulation**, on constate qu'on ne peut ni remonter le programme de calcul ni résoudre l'équation associée. La seule solution est donc de tâtonner : les élèves trouvent 2 mais pas 3,4296875. Quand tout le monde a compris comment tâtonner, une seconde **plénière de régulation** permet de constater que le tâtonnement est long : nous faisons émerger l'idée d'utiliser un tableur ou d'écrire un programme avec Python. La deuxième option est retenue.

Comme $f(x) = 2x(128x - 695) + 1856$, l'équation $f(x) = 100$ est du second degré, et on ne sait pas la résoudre.
En tâtonnant avec la calculatrice, on a trouvé que $f(2) = 100$.
On pense qu'il y a un autre antécédent entre 3,4 et 3,5 mais le tâtonnement est long, alors on a décidé d'utiliser Python.

Nous prévenons les élèves qu'ils doivent être particulièrement attentifs car nous allons présenter une façon un peu spéciale d'utiliser Python et qu'ils devront travailler de cette façon à la maison. Nous allons sur Brython.info, cliquons sur « Console » (la console d'IDLE conviendrait aussi) et montrons comment définir et utiliser une fonction dans la console, par exemple :

```
>>> def double(x): [Entrée]
... [taper 4 espaces] return 2*x [Entrée]
... [Entrée encore]
>>> double(3) [Entrée]
6
```

L'avantage de cette méthode est que nous n'avons ni besoin d'utiliser `input` car nous tapons directement les nombres à traiter, ni besoin de conversion avec `int` ou `float`, ni besoin d'utiliser `print` car la console affiche ce qu'on lui demande de calculer. L'inconvénient est que nous n'enregistrons pas de programme pour une éventuelle utilisation ultérieure.

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 100 (SUITE)

1. Allez sur le site Brython.info, cliquez sur « Console », puis définissez une fonction informatique qui correspond au programme de calcul. Vous pouvez vous inspirer de la définition de la fonction `double` suivante.

```
>>> def double(x): [Entrée]
... [taper 4 espaces] return 2*x [Entrée]
... [Entrée encore]
```

2. Recopiez la définition de cette fonction sur votre cahier de recherche.
3. À l'aide de cette fonction, déterminez un antécédent de 100 compris entre 3,4 et 3,5 (pensez à utiliser le point à la place de la virgule).

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Nous projetons certaines fonctions, d'autres sont saisies sur Brython.info par leur développeuse ou développeur. La question de l'exactitude des résultats affichés par le programme est posée. Python affiche « 100.0 » car il s'agit d'un nombre de type flottant. Comme l'étude de ce type de nombre dépasse le cadre du programme de seconde (et même de terminale !), la seule chose que nous puissions dire est qu'il faut toujours prendre des précautions avant d'affirmer un résultat mathématique à l'aide d'un résultat donné par un calcul fait avec des nombres flottants, et plus généralement un calcul fait par une machine. Nous illustrons ce fait par l'exemple suivant.

```
>>> x = 1/2**53  # Soit x l'inverse de 2^53 (≃ 9 000 000 000 000 000)
>>> x + 1        # Est-il solution de l'équation x + 1 = 1 ?
1.0
>>> x == 0       # Est-il nul pour autant ?
False
```

Or, d'après la calculatrice, $f(3{,}4296875) = 100$. Comme le résultat affiché (100) n'a que trois chiffres, nous le considérons fiable.

Nous gardons traces de certains programmes de manière à pouvoir faire un bilan tel que celui-ci à coller dans le cahier.

FONCTION INFORMATIQUE DE SALOMÉ

```
Brython    Console    Editeur

Brython 3.7.2 on Netscape 5.0 (X11)
>>> def f(x):
...     a = x*128
...     b = a-695
...     c = b*2
...     d = c*x
...     e = d+1856
...     return e
...
>>> f(3.4296875)
100.0
>>> |
```

Source : brython.info

FONCTION INFORMATIQUE D'ANNABELLE

```
Brython    Console    Editeur

Brython 3.7.2 on Netscape 5.0 (X11)
>>> def f(x):
...     return (128*x-695)*2*x+1856
...
>>> f(3.4296875)
100.0
>>> |
```

Source : brython.info

Lorsque l'utilisateur saisit « f(3.4296875) » dans la console, « 100.0 » s'affiche. Donc l'antécédent cherché semble être 3,4296875.

Les calculs de Python avec des nombres flottants ne sont pas toujours exacts, mais comme la calculatrice donne le même résultat et que le résultat affiché (100) n'a que trois chiffres, 3,4296875 est la solution cherchée.

Nous demandons aux élèves s'ils ont déjà rencontré d'autres équations du second degré que celle que l'on vient d'étudier. Les résultats sur les équations de la forme $x^2 = a$ sont rappelés (voir p. 113). Nous annonçons que nous allons en étudier d'autres.

EXERCICE DES DEUX SOLUTIONS

1. Montrez que le nombre 2 est solution de l'équation du second degré $-2y^2 + 3y + 2 = 0$.
2. Montrez que le nombre $-0{,}5$ est solution de l'équation $-2y^2 + 3y + 2 = 0$.
3. Montrez que pour tout nombre y, on a $-2y^2 + 3y + 2 = (2y + 1)(2 - y)$.
4. Les nombres 2 et $-0{,}5$ sont-ils les seules solutions de l'équation $-2y^2 + 3y + 2 = 0$?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Nous travaillons l'erreur qui consiste à écrire en premier $-2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 2 = 0$ pour la question 1 ou $-2y^2 + 3y + 2 = (2y + 1)(2 - y)$ pour la question 3 : en mathématiques, sauf lors d'un raisonnement par l'absurde ou par équivalence, quand on écrit quelque chose, on sait que ce quelque chose est vrai parce qu'on l'a démontré. Le résultat doit apparaître à la dernière ligne, pas à la première.
Question 4. Même si on trouve « annulation d'un produit » dans le programme du cycle 4, cela pose problème. Nous demandons quels sont les produits nuls parmi $1{,}57 \times 6$; $31{,}4 \times 0$ et $0 \times (-1{,}5)$ puis disons aux élèves de s'inspirer de cela. Une fois l'exercice résolu, nous demandons de résoudre $(x - 3)(x + 4) = 0$ (**travail individuel très bref**). Idem avec $(2x + 1) - (x + 1) = 0$ pour éviter les généralisations abusives.

Nous terminons par un point historique. Thomas Harriot (1560-1621) est un mathématicien anglais qui partage avec René Descartes (1596-1650) la mise sous forme de « produit nul ». Cela fait partie des contestations de « premier » dans l'histoire des mathématiques, les Anglais attribuant tout à Harriot, et les Français plutôt à Descartes. Ceci étant, il semble que Descartes était beaucoup plus clair et tira tout le profit de son invention, en particulier pour la factorisation des équations par la méthode des coefficients indéterminés.

Le bilan est fait à partir du bilan CL3 n° 3 contenant une solution de l'exercice où la notion d'équation produit est mise en avant. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan et l'exercice des antécédents de 100 (le retour) qui suit.

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 100 (LE RETOUR)

Soit f la fonction correspondant au programme suivant et x un nombre.

```
Multiplier par 128
Enlever 695
Doubler
Multiplier par le nombre de départ
Ajouter 1856
```

1. Développez les expressions $2x(128x - 695) + 1856$ et $(2x - 4)(128x - 439)$.
2. En déduire que $f(x) = 100$ est équivalent à $(2x - 4)(128x - 439) = 0$.
3. Les nombres 2 et 3,4296875 sont-ils les seuls antécédents de 100 par la fonction f ?
4. (Question pour les rapides) Déterminez les antécédents de 1856 par la fonction f.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Une fois la solution $\frac{439}{128}$ obtenue, nous revenons sur la question de l'exactitude de la solution 3,4296875. La calculatrice donne $\frac{439}{128} = 3{,}4296875$, ce qui confirme que 3,4296875 est solution.

2. $f(x) = 100$ équivaut à :
$2x(128x - 695) + 1856 = 100$
$256x^2 - 1390x + 1756 = 0$
$(2x - 4)(128x - 439) = 0$
3. L'équation précédente équivaut à $2x - 4 = 0$ ou $128x - 439 = 0$.

EXERCICE DES ANTÉCÉDENTS DE 0

Soit f la fonction correspondant au programme suivant.

```
Tripler
Enlever 8
Diviser par la somme du nombre de départ et de 5
```

1. Déterminez l'image de – 5 par la fonction f.
2. Déterminez les antécédents de 0 par la fonction f.
3. (Question pour les rapides) Déterminez les antécédents de 3 par la fonction f.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Une fois l'exercice résolu, nous demandons de résoudre l'équation $\frac{7x+1}{7x-1} = 0$.

1. – 5 n'a pas d'image par f car on ne peut pas diviser par 0.
2. Pour $x \neq -5$, on a : $f(x) = \frac{3x-8}{x+5}$.
Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc $f(x) = 0$ revient à $3x - 8 = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{8}{3}$.
Conclusion : $\frac{8}{3}$ est le seul antécédent de 0 par f.

EXERCICE NUL

Complétez les phrases suivantes, puis traduisez le résultat avec deux variables x et y.
1. Pour que la somme de deux nombres soit nulle, il faut et il suffit que ....
Traduction littérale : ....
2. Pour que la différence de deux nombres soit nulle, il faut et il suffit que ....
Traduction littérale : ....
3. Pour que le produit de deux nombres soit nul, il faut et il suffit que ....
Traduction littérale : ....
4. Pour que le quotient de deux nombres soit nul, il faut et il suffit que ....
Traduction littérale : ....
5. Pour que le carré d'un nombre soit nul, il faut et il suffit que ....
Traduction littérale : ....

Travail individuel très bref, puis plénière pour chaque phrase. Pour la phrase 3, nous demandons à quelle condition le produit de trois nombres est nul, etc. Une fois la question 5 résolue, nous demandons de résoudre l'équation $(9 - 4x)^2 = 0$.

1. Pour que la somme de deux nombres soit nulle, il faut et il suffit que l'un soit l'opposé de l'autre.
Traduction littérale : $x + y = 0$ si et seulement si $x = -y$
4. Remarque : $\frac{x}{y}$ n'est défini que si $y \neq 0$
Résolution de l'équation $(9 - 4x)^2 = 0$
D'après la phrase 5, cette équation équivaut à $9 - 4x = 0$. Il y a donc une seule solution : 2,25.

AUTRES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Nous demandons aux élèves de résoudre les deux équations du second degré suivantes, que nous notons au tableau.
1. $x^2 - 16x = 0$
2. $x^2 - 16 = 0$

Travail individuel, puis plénière. Question 1. C'est une des premières fois, depuis le cycle 4, qu'on utilise la factorisation à l'aide d'un facteur commun.
Question 2. Le plus simple est de se ramener à $x^2 = 16$ dont les solutions sont connues. La méthode de factorisation à l'aide de l'identité remarquable vue en cycle 4 est néanmoins rappelée. Premières utilisations : résoudre $x^2 + 3x = 0$; $x^2 - 10 = 0$…

Le bilan est fait à partir du bilan CL3 n° 4 ci-dessous.

Factorisation

Factoriser une somme ou une différence, c'est la transformer en un produit ou une puissance.
On peut factoriser à l'aide d'un facteur commun ou à l'aide d'une identité remarquable.

ÉQUATION	MÉTHODE	CALCULS ET SOLUTIONS
$x^2 - 16x = 0$	Se ramener à une équation produit en factorisant à l'aide d'un facteur commun.	$x \times x - 16 \times x = 0$ $x(x - 16) = 0$ $x = 0$ ou $x - 16 = 0$ $S = \{0 ; 16\}$
$x^2 - 16 = 0$	Se ramener à une équation du type $x^2 = a$.	$x^2 = 16$ $\sqrt{16} = 4$ $S = \{-4 ; 4\}$

Nous écrivons au tableau les deux équations suivantes que les élèves doivent résoudre.
1. $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. $x^2 + 1 = 0$

Travail individuel, puis plénière. Question 1. C'est la première fois que les élèves utilisent la factorisation à l'aide d'une identité remarquable pour résoudre une équation.
Question 2. On se ramène à une équation du type $x^2 = a$. Premières utilisations : $4x^2 + 1 = 0$; $4x^2 - 1 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 + 4x + 4 = 0$…

Nous écrivons au tableau ces deux équations.
1. $1 + \frac{2}{x-5} = 0$
2. (Question pour les rapides) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0$

Travail individuel, puis plénière de régulation pour faire émerger l'idée de mettre au même dénominateur. Des élèves peuvent aussi proposer de multiplier l'égalité par $x - 5$.

Plénière. La question de la définition de l'expression est posée.

Le bilan est fait à partir du bilan CL3 n° 5 ci-dessous. Ce bilan contient une erreur volontaire (S = {1}) à corriger par les élèves.

ÉQUATION	MÉTHODE	CALCULS ET SOLUTIONS
$x^2 + 2x + 1 = 0$	Se ramener à une équation du type $(ax + b)^2 = 0$ en factorisant à l'aide d'une identité remarquable. Le seul nombre dont le carré est nul est 0. Donc cette équation équivaut à $ax + b = 0$.	$(x + 1)^2 = 0$ $x + 1 = 0$ $S = \{1\}$
$x^2 + 1 = 0$	Se ramener à une équation du type $x^2 = a$	$x^2 = -1$ $-1 < 0$ $S = \varnothing$
$1+\dfrac{2}{x-5}=0$	Se ramener à une équation de la forme $\dfrac{(ax+b)}{(cx+d)} = 0$ en réduisant au même dénominateur. Puis utiliser qu'un quotient est nul à condition que son numérateur soit nul.	$\dfrac{(x-5)}{(x-5)} + \dfrac{2}{(x-5)} = 0$ $\dfrac{(x-3)}{(x-5)} = 0$ $x - 3 = 0$ $S = \{3\}$

EXERCICE : SÉRIE CL3-3 (CLUB DES EXPRESSIONS)

1. $x^2 - 16$
2. $\dfrac{x}{x+7}$
3. $x^2 + 5x$
4. $(x-4)(x+5)$
5. $x - \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{2x+5}{x-5}$
7. $4x^2 + 40x + 100$
8. $4 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3x}$

Travail à la maison, puis plénière. La série est faite à l'aide du vidéoprojecteur. Nous revenons sur certaines conventions d'écriture.

Nous distribuons les résumés Factorisation, équations produit et Autres types d'équations.

UNE DÉMONSTRATION QUI UTILISE LA FACTORISATION

LA SOMME DE DEUX MULTIPLES DE a EST UN MULTIPLE DE a

Plénière de démonstration

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
Question : Sous quelle forme peut s'écrire un multiple de a ?
Question : Sous quelle forme peut s'écrire la somme de deux multiples de a ?
Question : Démontrez que la somme de deux multiples de a est un multiple de a. CQFD

La démonstration La somme de deux multiples de a est un multiple de a est collée dans le cahier de résumés.

ENTRAÎNEMENT DE CALCUL LITTÉRAL N° 4

En bas de cette page, puis sur les pages suivantes, traitez les questions Série 1-1 ; Série 1-2 ; Série 1-3 ; Série 2-1 ; Série 2-2 et Série 3-1. N'en faites pas plus pour le moment (ou bien sur un brouillon que vous ne rendrez pas).

Série 1 : Factorisation

Factorisez les expressions suivantes à l'aide d'un facteur commun ou d'une identité remarquable.

1. $x^2 + 5x$
2. $x^2 - 100$
3. $x^2 - 4x + 4$
4. $3x^2 - 4x$
5. $4x^2 - 100$
6. $x^3 + x$
7. $4x^2 + 40x + 100$
8. $9x^2 - 25$

Série 2 : Résolution d'une équation du second degré

Résolvez les équations du second degré d'inconnue x suivantes.

1. $x^2 = 5$
2. $(x-4)(2x+5) = 0$
3. $(2x+1)(5-3x) = 0$
4. $x^2 - 6x + 9 = 0$
5. $3 + 7x^2 = 0$
6. $25x^2 - 64 = 0$
7. $2x^2 - 50 = 0$
8. $(x+3)^2 = 6x + 45$
9. $1 - \dfrac{x^2}{4} = 0$

Série 3 : Fonctions informatiques

Voici la définition d'une fonction informatique avec Python. Pour quelles valeurs de x retourne-t-elle 0 ?

1.
```
def A(x):
    return (2x-1)*(6+2x)
```
2.
```
def B(x):
    return 36-x**2
```
3.
```
def C(x):
    return 9*(x**2) - 12*x + 4
```

Série 4 : Écriture sous forme fractionnaire

Écrivez les expressions suivantes sous forme fractionnaire à l'aide d'une réduction au même dénominateur.

1. $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$

2. $3+\frac{1}{x}$

3. $\frac{1}{x+6}+1$

4. $\frac{1}{2x}-5$

5. $\frac{2}{x}+\frac{1}{3x}$

6. $x+\frac{1}{x+1}$

Série 5 : Résolution d'une équation avec une expression fractionnaire

Résolvez les équations d'inconnue x suivantes.

1. $\frac{4x-3}{x+1}=0$

2. $1+\frac{4}{x}=0$

3. $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=4$

4. $\frac{2}{3x}-4=0$

5. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}=0$

Nous utilisons à nouveau le protocole des « séries d'exercices avec allers-retours ».

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous posons des questions similaires à celles des séries 2 et 5 de l'entraînement de calcul littéral n° 4.

ALGORITHMIQUE
ET PROGRAMMATION

Considérations générales
sur l'algorithmique et la programmation

NOS PARTIS PRIS

Même si le langage de programmation MicroAlg (voir microalg.info) est cher à notre cœur et nous semble plus adapté que Python en seconde, nous n'apprenons aux élèves que le langage Python (et laissons donc aussi de côté les langages des calculatrices Casio ou TI).

Nous faisons en sorte que les élèves utilisent les machines fréquemment. L'algorithmique est une science qui se suffit à elle-même mais l'utilisation de la machine en étant la finalité, cette dernière nous paraît primordiale. Cela rend le travail plus vivant et plaisant, mais permet aussi un retour immédiat sur le travail de l'élève, même si le professeur n'est pas disponible à ce moment. Il est proposé, dans les séquences AP1 et AP2 qui suivent, quatre séances de 55 minutes chacune en salle informatique, même si davantage seraient préférables. En plus de cela, les élèves utilisent régulièrement Python en dehors de ces séances au travers d'un simple navigateur via Brython.

Nous utilisons comme moteur de l'apprentissage le plaisir par le jeu, en particulier dans la séquence AP1 où les deux exercices principaux sont des jeux (exercice de la momie, jeu du nombre mystère). Dans la séquence AP2, des jeux faisant intervenir le hasard sont proposés.

Nous retravaillons en profondeur la plupart des contenus de cycle 4, avec Python au lieu de Scratch. Cela donne une seconde chance aux élèves qui ne les ont pas encore élaborés correctement et permet aux autres d'en approfondir la maîtrise.

Nous respectons une certaine progressivité dans les types d'exercices proposés. Nous nous sommes inspirés librement du travail de Thierry Chevalarias, membre de l'IREM de Poitiers, rencontré lors d'une journée d'échanges de pratiques de l'APMEP en 2017 et qui dégage une progression des différentes tâches autour de l'algorithmique et de la programmation (nous suivons approximativement cette progression pour chaque notion étudiée) :
– exécuter, tester et valider, potentiellement sur différentes valeurs (seulement pour les programmes) ;
– lire et comprendre (sans exécuter pour les programmes) ;
– compléter (besoin de comprendre) ;
– corriger (idem) ;
– implémenter (passer d'un algorithme donné à un programme) ;
– construire (partir de rien et obtenir un algorithme ou un programme).

Quand nous voulons faire écrire aux élèves un programme un peu complexe en Python, nous leur faisons d'abord écrire un algorithme correspondant sur papier lors de la séance qui précède (voir exercice de l'équation automatique p. 147, jeu du nombre mystère p. 194 et simulations de marches aléatoires p. 207). Comme tout algorithme, il est à destination d'un être humain ; nous convenons ici que l'être humain est *un informaticien ou une informaticienne qui comprend le français, qui connaît* Python et qui devra pouvoir traduire facilement l'algorithme en Python. Pour que les élèves expriment plus facilement leurs idées, nous demandons d'écrire l'algorithme en français et non pas dans un pseudo-code plus ou moins rigide, même si, pour les aider, nous leur donnons une liste d'instructions qui peuvent être utilisées. Une fois les algorithmes écrits, ils sont étudiés collectivement ; ce travail, riche en lui-même, facilitera grandement la programmation sur machine.

Dans la mesure du possible, nous attendons l'apparition d'un besoin pour aborder une notion. Par exemple, le type « nombre à virgule flottante » est introduit dans l'exercice des antécédents de 26 et 27 (voir p. 167). Autre exemple : la simulation avec `randint` et l'utilisation des boucles sont utilisées pour étudier les marches aléatoires quand les calculs ne sont pas envisageables (voir séquence AP2, p. 198).

ENVIRONNEMENTS DE PROGRAMMATION

Nous avons choisi Brython et IDLE pour leur simplicité et leur disponibilité.

Brython est une version de Python exécutable dans un navigateur. Le site officiel Brython.info comporte une page console et une autre pour l'édition de programmes (où la zone d'affichage n'est pas une console). Suivant le type de connexion, le premier chargement d'une page utilisant Brython peut durer une dizaine de secondes. Cette durée peut être raccourcie en installant cette page sur le réseau de l'établissement.

IDLE est un environnement de développement intégré pour Python (écrit en Python !) que l'on retrouve avec presque toute installation de Python car il fait partie de la bibliothèque standard. Il doit être installé sur l'ordinateur, comporte une console et un éditeur de fichiers (affichage et saisie au cours du déroulement du programme s'effectuent dans la console). Par souci de cohérence avec Brython, nous faisons disposer systématiquement la « zone programme » sur le demi-écran gauche et la « zone affichage et saisie » sur le demi-écran droit.

PROGRESSION SUR L'ANNÉE

Pour une meilleure assimilation, nous avons regroupé la plus grande partie du travail dans les séquences AP1 et AP2 qui constituent deux « blocs » d'une semaine environ comportant chacun deux séances complètes sur machine. Des travaux sont également proposés dans les autres séquences, de manière beaucoup plus clairsemée.

Nous commençons, dès AP1, le travail sur les nouveautés du programme de seconde : la notion de fonction informatique et la production d'un texte dans un langage informatique ; ce travail se poursuivra toute l'année. Dans AP1, les élèves découvrent Python : valeurs de type entier, de type chaîne de caractère et de type booléen, fonctions à un ou plusieurs arguments, instructions conditionnelles, instructions de demande de valeur à l'utilisateur et instructions d'affichage. Lors de la première séance en salle informatique, les élèves prennent en main l'environnement IDLE et jouent avec l'exercice de la momie. Le statut de cet exercice est spécial car notre objectif est de proposer un simple survol de presque toutes les notions vues au cycle 4, cette fois-ci sous forme de texte. Lors de la deuxième séance en salle informatique, les élèves implémentent l'algorithme du jeu du nombre mystère, algorithme qui a été écrit en français auparavant ; c'est aussi l'occasion de présenter la notion de bibliothèque avec Python.

La séquence AP2 est motivée par le besoin de simuler des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ de longueur 10 (voir p. 97). Nous y introduisons les tirages pseudo-aléatoires, les boucles *faire n fois*, les boucles *tant que*, les boucles *pour* et la manipulation de valeurs booléennes.

Une partie du travail est faite en dehors de AP1 et AP2. Il s'agit soit de réutiliser ce qui a été élaboré dans AP1 ou AP2, soit de découvrir de nouvelles notions, en l'occurrence celles d'algorithme et de variable de type flottant (voir le tableau de progression p. 22).

SÉQUENCE 12

Algorithmique et programmation (1re partie) (AP1)

Au cycle 4, les élèves ont programmé en Scratch. Ils ont utilisé des instructions conditionnelles et des boucles *répéter … fois* et *répéter jusqu'à …*, ainsi que des variables pour réaliser des figures, des calculs et des déplacements complexes.

PROGRAMME 2019

Algorithmique et programmation

– Une consolidation des acquis du cycle 4 est proposée autour de deux idées essentielles : la notion de fonction et la programmation comme production d'un texte dans un langage informatique.
– Variables informatiques de type entier, booléen, […], chaîne de caractères.
– Concevoir et écrire une instruction d'affectation, une séquence d'instructions, une instruction conditionnelle.
– Écrire une formule permettant un calcul combinant des variables.
– Fonctions à un ou plusieurs arguments.
– Les élèves s'exercent à :
  - décrire des algorithmes en langage naturel ou dans un langage de programmation ;
  - en réaliser quelques-uns à l'aide d'un programme simple écrit dans un langage de programmation textuel ;
  - interpréter, compléter ou modifier des algorithmes plus complexes.
– Les élèves sont entraînés à passer du langage naturel à Python et inversement.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

– **Étape 1** : Découverte des mémoires de la calculatrice, ce qui prépare le travail sur les variables informatiques de l'étape 2. Cette première étape a été prévue pour des calculatrices Casio et TI, mais peut facilement être adaptée.
– **Étapes 2 et 3** : Découverte de Python et des fonctions informatiques. Les connaissances de collège sont réactivées, à l'exception des boucles. Ces étapes s'étalent sur un peu plus d'une semaine et nécessitent deux séances en salle informatique, une vers le début et une vers la fin. Les séances du milieu ne sont pas exclusivement consacrées à cela. Deux environnements sont proposés aux élèves pour programmer en Python : IDLE pour les séances au lycée et Brython.info pour les exercices à faire à la maison.

ÉTAPE 1

Mémoires de la calculatrice

Phase d'élaboration | 20 minutes

Les élèves qui ont une Casio tapent sur les touches suivantes.

6 × 9 EXE + 1 EXE + 1 EXE

Ceux qui ont une TI remplacent EXE par `entrer`. Les nombres 54, 55 et 56 s'affichent successivement sur la calculatrice. **Travail individuel très bref** pour expliquer comment la calculatrice a procédé.

Plénière. La calculatrice stocke le résultat du dernier calcul effectué dans une mémoire appelée `Ans` (Casio) ou `Rép` (TI).

Si on commence un calcul par une touche d'opération, la machine considère que le nombre à mettre avant est celui affecté à la mémoire `Ans` ou `Rép`. Ici, les valeurs 54, 55 et 56 ont été successivement *affectées à cette mémoire*.

Nous expliquons ensuite qu'il y a d'autres mémoires que celle-ci. Chacune est comparable à une « fiche cartonnée » avec deux zones. Nous projetons la diapositive 1 du diaporama :
– une zone avec le nom de la mémoire (Ans ou Rép ou A ou B…), que l'on ne peut pas modifier ;
– une zone avec la valeur de cette mémoire : cette valeur peut être inscrite par l'utilisateur, puis rappelée ou modifiée. Elle est conservée tant que les piles ne sont pas trop usées, ce qui permet de réutiliser le nombre, même après avoir éteint la calculatrice.
Attention : ne pas confondre *la* mémoire de la calculatrice (la capacité de stockage) et *une* mémoire !

Sous la caméra, nous montrons, avec une Casio et une TI, comment stocker un nombre dans la mémoire A puis comment le rappeler. Nous faisons rapidement le lien avec les variables de Scratch et distribuons le résumé Les mémoires de ma calculatrice TI ou Les mémoires de ma calculatrice Casio.

Les élèves écrivent le titre de la séquence.

EXERCICE DES ROUPIES

Le 6 novembre 2018, le cours de la roupie indienne, monnaie officielle de l'Inde, était de 0,01201 €.
1. Stockez dans la mémoire R de votre calculatrice la valeur 0,01201.
En utilisant le contenu de la mémoire R, déterminez le nombre d'euros correspondant à 64 000 roupies.
2. Stockez dans la mémoire E de votre calculatrice le nombre de roupies correspondant à 1 €.
En utilisant le contenu de la mémoire E, déterminez le nombre de roupies correspondant à 44,70 €.
3. [Question pour les rapides] Combien de touches de la calculatrice utilise-t-on pour saisir et exécuter $(2 \times 12\,345 + 1) \times (6 \times 12\,345 + 4) \div (3 \times 12\,345 + 2) \div (4 \times 12\,345 + 2)$?
Peut-on obtenir le même résultat avec moins de touches ?

Travail personnel avec entraide. Si besoin, nous autorisons des élèves à se déplacer auprès de camarades ayant la même calculatrice.

Plénière. Différentes procédures de proportionnalité sont exposées et présentées dans un tableau.
Question 1. Après l'explication d'un élève qui a saisi `64000 × Alpha R EXE` (ou `entrer`), nous demandons ensuite quel est le contenu de la mémoire R.

ÉTAPE 2

Découverte de Python et des fonctions informatiques

Phase d'élaboration | 1h30 en salle ordinaire et 55 minutes en salle informatique

En salle ordinaire, lors de la séance qui précède le travail sur ordinateur, nous présentons *le langage de programmation Python* (nous écrivons ce qui est en italique au tableau au fur et à mesure) : « Comme Scratch, Python permet de fabriquer des *programmes* qu'on peut ensuite *exécuter*. Un programme Python est une suite d'instructions en langage Python données à la machine. Avec Scratch, vous avez fabriqué des programmes avec des blocs ; pour fabriquer un programme avec Python, vous taperez un texte qui s'appelle *le code du programme*. » Nous ouvrons l'*environnement IDLE* et testons la *console* avec un simple calcul comme 2 + 3.

Nous annonçons ensuite que nous allons *éditer un programme* Python : File/New File. Nous arrangeons les fenêtres pour que le programme occupe le demi-écran gauche, la console le demi-écran droit (comme sur Brython.info). Le programme est créé mais il n'y a aucune instruction écrite pour le moment. Nous tapons le programme suivant en disant que *print signifie ici afficher* :

```
a = 5
print(a+a)
```

Nous posons la question : « Que va faire l'ordinateur lors de l'exécution du programme ? » (**travail individuel très bref**) : 5 sera affecté à la « mémoire » (ou variable) a puis « 10 » sera affiché.

Pour que la machine fasse effectivement ce qui lui est demandé, il faut exécuter le programme. Nous le faisons à l'aide de Run/Run Module (*Run signifie ici exécuter un programme*). Une fois le programme nommé et enregistré, « 10 » s'affiche dans la console.

L'explication est la suivante : la valeur à afficher résulte de l'évaluation de l'expression entre parenthèses. Ici, a est une variable informatique, semblable à une mémoire de la calculatrice. Comme on lui a affecté la valeur 5, l'évaluation de l'expression donne « 5 + 5 » suite à la lecture de la valeur contenue dans la mémoire a, puis « 10 » suite au calcul de la somme. Un des avantages de Python sur les calculatrices est que les noms des variables peuvent être des mots entiers. Nous remplaçons a par `blabla` dans le programme, puis l'exécutons à nouveau.

EXERCICES EN SALLE INFORMATIQUE

Exercice des trois programmes

Un par un, éditez (créez) les programmes ci-dessous à l'aide de l'environnement IDLE puis exécutez-les. Attention ! Lors de l'exécution du programme 3, l'utilisateur doit saisir un nombre puis appuyer sur « Entrée ». Le programme 3 est à exécuter plusieurs fois. Quand vous pensez avoir compris ce qu'il fait, écrivez-le sur votre cahier de recherche.

Programme 1

```
print("Hello World!")
```

Programme 2

```
def Z(x):
  y = 3*x + 2*(5-x)
  return y

print(Z(1))
print(Z(2), Z(3), Z(4))
```

Programme 3

```
print("Quel est votre âge ?")
x = int(input())
if x < 18:
  print("Vous êtes mineur !")
else:
  print("Vous êtes majeur !")
```

Exercice de la momie

1. Allez sur l'espace informatique de votre classe, copiez le programme **Momie.py**, collez-le dans votre dossier Python et ouvrez-le avec IDLE. Le code de ce programme a été copié ici :

```
# Voici le code du programme de la momie !
from random import randint
points_de_vie = 1
score = 0
while points_de_vie > 0:
  porte_momie = randint(1, 3)
  print("Trois portes devant toi. Laquelle ouvres-tu : 1, 2, ou 3 ?")
  porte_choisie = int(input())
  if porte_choisie == porte_momie:
    print("Une momie te dévore !")
    points_de_vie = points_de_vie - 1
  else:
    print("La pièce est vide, tu entres.")
    score = score + 1
print("Le jeu est fini, ton score est", score)
```

Pour faire une partie du jeu de la momie, exécutez ce programme. L'exécution du programme commence par l'affichage d'une question dans la console : répondez à cette question, puis tapez sur « Entrée » pour poursuivre l'exécution du programme. Testez le programme plusieurs fois, jusqu'à ce que vous ayez compris comment une partie se déroule.

2. Vous allez devoir modifier plusieurs fois le programme Momie.py. Lorsqu'une question est résolue, nommez votre nouveau programme Momie1.py, Momie2.py etc. et enregistrez-le dans votre dossier Python.

a. Modifiez le code de Momie.py pour que chaque passage dans une pièce vide fasse augmenter le score de 10 points. Testez votre programme Momie1.py jusqu'à obtenir un score tel que 20, 30 ou 40…

b. Modifiez le code de Momie.py pour que le jeu comporte quatre portes et que la momie puisse se trouver derrière l'une des quatre portes. Testez votre programme Momie2.py en répondant toujours 4.

c. Modifiez le code de Momie.py pour que s'affiche, suivant les cas, « Bravo, ton score est supérieur ou égal à 4 ! » ou bien « Tu n'as pas atteint 4, essaye encore ! ».

d. Modifiez le code de Momie.py pour que, au cas où le numéro de porte entré par l'utilisateur soit supérieur à 3, le programme affiche d'abord « Tu as triché ! », puis le message final avec un score de – 100 (l'instruction `break` provoque la sortie de la boucle). Testez votre programme Momie4.py en répondant 4 à une des questions.

e. Modifiez le code de Momie.py pour que, lorsque le joueur rencontre une momie, celle-ci lui propose un tirage à pile ou face qui pourra lui sauver la vie s'il devine le résultat du lancer.

f. Modifiez le code pour qu'en plus de la momie, d'autres monstres retirent davantage de points au joueur. Un monstre pourrait lancer un dé et retirer ce nombre de points de vie au joueur.

Il s'agit du premier **travail en salle informatique** (voir p. 43). Les élèves manipulent maintenant eux-mêmes l'ordinateur. Seule une moitié de la classe participe. Nous distribuons les deux exercices simultanément, projetons Aide Python n° 1 et disons : « Pour découvrir Python, vous allez commencer par exécuter trois programmes simples. Recopiez le code de chacun en respectant *les espaces*, *les passages à la ligne* et *l'indentation* (nous expliquons ce que c'est) ; puis enregistrez-le dans un dossier que vous nommerez « Python » et que vous mettrez dans votre espace personnel ; enfin exécutez-le. Quand vous aurez fini, vous aurez à exécuter et modifier un programme plus complexe, celui du jeu de la momie. L'objectif n'est pas de comprendre entièrement ce programme, mais de découvrir Python en s'amusant. Pour vous aider, je projette au tableau une aide pour utiliser IDLE et un lexique. »

Travail personnel avec entraide. L'objectif est que tous les élèves aillent jusqu'à la question 2.b de l'exercice de la momie. Certains ne vont pas plus loin alors que d'autres commencent la question 2.f, très ouverte. Le travail pourra être poursuivi à la fin de la deuxième séance en salle informatique. Nous ne récupérons pas les programmes des élèves mais observons ce qu'ils font pour en parler en plénière si besoin.

Plénière de régulation. Lorsqu'ils testent le programme de la momie, des élèves malins entrent un numéro de porte autre que 1, 2 ou 3, et vont ainsi aussi loin qu'ils veulent. L'un d'eux expose son « truc ». Nous expliquons qu'il s'agit d'une faille du programme, que cette faille sera en partie traitée à la question 2.d. Nous leur demandons de s'en tenir bien sagement aux consignes pour le moment.

RETOUR EN SALLE ORDINAIRE SUR LE TRAVAIL MENÉ EN SALLE INFORMATIQUE

Programme 1

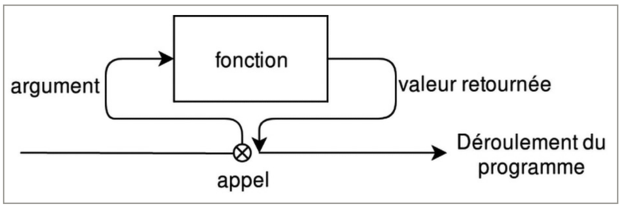
Nous écrivons deux programmes au tableau et demandons quel est le rôle des guillemets :

```
a = 5          print("Hello world!")
print(a+a)
```

Une fois la réponse donnée, nous disons qu'avec les guillemets la valeur à afficher est de type « chaîne de caractères » ou « texte » : l'ordinateur l'affiche directement dans la console sans chercher à savoir si c'est une expression mathématique dont il faut évaluer la valeur.
La tradition d'utiliser « Bonjour, Monde » dans un premier programme pour tester un langage date de la fin des années 1970. Nous projetons la page « Hello world » de Wikipedia et la commentons rapidement.

Programme 2

Ce programme commence par la définition d'une *fonction informatique* (utilisation du mot-clé `def`). Une telle fonction peut ensuite être *appelée* dans un programme ou dans la console si on fait suivre son nom de parenthèses, parenthèses dans lesquelles figure un *argument*. Par exemple, `Z(1)` est l'appel de `Z` avec l'argument 1. En général, une fonction informatique *retourne* une valeur.
En nous appuyant sur l'image ci-dessous projetée (diapositive 2), nous faisons une analogie entre l'appel d'une fonction et l'aller-retour fait par un messager : « Quand l'ordinateur exécute le programme et qu'il arrive à `Z(1)`, il considère que `Z` est une fonction en raison des parenthèses qui suivent. Il envoie alors un "messager" vers la définition de la fonction `Z` en lui donnant un papier avec "1" marqué dessus. La fonction `Z` est comme un guichet. Quand le messager arrive au guichet, il donne le papier avec le "1". Le métier du guichetier est d'effectuer le calcul `3*x + 2*(5-x)` en remplaçant `x` par le nombre marqué sur le papier et de donner au messager un nouveau papier avec le résultat (ici "11") marqué dessus. Le messager reçoit son nouveau papier, revient au point de départ et l'ordinateur continue à exécuter le programme en remplaçant `Z(1)` par 11. »
Nous considérons le mot « appel » comme un objectif d'apprentissage, mais pas le mot « argument ». Nous laissons dire aussi que l'instruction `print(Z(1))` affiche l'image de 1 par la fonction (mathématique), alors que cette instruction affiche la valeur retournée par la fonction (informatique). `Z` est utilisée ici pour simuler une fonction mathématique.



Programme 3

Quelques élèves lisent la phrase d'explication notée sur leur cahier de recherche en salle informatique. Puis nous commentons le programme. Quand la deuxième ligne du programme est exécutée, le déroulement du programme s'arrête à l'appel de la fonction informatique `input`. L'utilisateur saisit un nombre puis, quand il tape sur la touche « Entrée », l'exécution de cette ligne continue par la conversion de ce que l'utilisateur a tapé en nombre entier (*integer* en anglais), puis ce nombre entier est affecté à la variable `x`.

Au lieu d'afficher une valeur calculée directement à partir de `x`, un test est réalisé sur cette variable. Ce test `x < 18` a une valeur spéciale : c'est une valeur booléenne (du logicien George Boole), comme les blocs pointus de Scratch. Grâce à la console, nous montrons que lorsque Python rencontre l'opérateur +, il effectue une addition et la valeur qui résulte de l'opération est un nombre. Quand Python rencontre l'opérateur <, Python effectue une comparaison et la valeur qui en résulte est `True` ou `False` (« vrai » ou « faux » en anglais), et rien d'autre que ces deux valeurs. D'autres types de comparaison sont possibles.

AVEC L'OPÉRATEUR <	AVEC L'OPÉRATEUR <=	AVEC L'OPÉRATEUR ==	AVEC L'OPÉRATEUR !=

`>>> 16 < 18`
`True`
`>>> 20 < 18`
`False`
`>>> 18 < 18`
`False`
	`>>> 16 <= 18`
	`True`
	`>>> 20 <= 18`
	`False`
	`>>> 18 <= 18`
	`True`
		`>>> 0 == 1`
		`False`
		`>>> 1 == 1`
		`True`
			`>>> 0 != 1`
			`True`
			`>>> 1 != 1`
			`False`

Si (« if » en anglais) `x` a une valeur strictement inférieure à 18, la comparaison vaut `True` et c'est le premier bloc de code qui est exécuté (avec le premier `print`) et pas le second. Sinon (« else » en anglais), la comparaison vaut `False` et c'est le second bloc qui est exécuté seulement (le bloc après `else`).

Nous montrons la diapositive 3 consacrée à Georges Boole et disons qu'il a créé un système de logique « binaire » basé sur des calculs n'acceptant que deux valeurs, 0 et 1, système qui aura de nombreuses applications en téléphonie et en informatique un siècle plus tard.

Lors du commentaire du programme, nous disons que `input`, `print` et `int` sont aussi des fonctions informatiques.

- La fonction `input` est appelée en plaçant des parenthèses vides à sa droite car elle n'a pas besoin d'argument. Elle n'attend pas d'information lors de son appel pour faire son travail, l'information dont la fonction a besoin pour retourner une valeur ne provient pas du programme mais du clavier. Cette fonction retourne ce que l'utilisateur a saisi sous forme de chaîne de caractères, même s'il n'y a que des chiffres.
- La fonction `print` peut être appelée sans argument ou avec. Dans le premier cas, une ligne vide est affichée. Dans le second cas, le ou les arguments, séparés par des virgules, sont considérés comme des expressions qui seront évaluées avant d'être affichées (comme `a+a`). On peut considérer que `print` ne retourne pas de valeur.
- La fonction `int` attend un argument et retourne une valeur.

Contrairement aux fonctions informatiques, les fonctions mathématiques attendent toujours un « argument » et ont toujours une valeur de retour (l'image de l'« argument » par la fonction).

Exercice de la momie

Nous ouvrons Momie.py et demandons aux élèves si la première ligne était nécessaire au bon déroulement du programme, avant d'expliquer rapidement le rôle des commentaires en programmation. Puis nous demandons si les momies étaient derrière les mêmes portes d'une partie à l'autre. Enfin, nous demandons quelle partie du code permet que les emplacements changent à chaque partie (**travail individuel très bref**). Nous commentons ensuite le code ligne par ligne rapidement en précisant qu'il s'agit d'une première approche et que nous reviendrons sur certaines instructions plus tard dans l'année.

Pour illustrer l'accumulation de valeurs dans une variable, nous éditons le programme ci-dessous et demandons ce qui va s'afficher (**travail individuel très bref**). À la fin des échanges, nous exécutons le programme. Nous recommençons avec le programme obtenu en mettant `print(Somme)` après chaque affectation.

```
somme = 0
somme = somme + 2
somme = somme + 5
print(somme)
```

Les élèves font des propositions pour les questions 2.a et 2.b. Aucune trace n'est laissée dans le cahier. Nous distribuons les résumés Programmation, Utiliser IDLE ou Brython pour programmer en Python et Instructions de Python (1re partie).

Nous écrivons au tableau « Donnez le chiffre des unités de 101^{101} » et ajoutons une question pour les rapides : « Même chose pour 102^{102} ».

Travail individuel très bref, puis plénière. Une fois le résultat trouvé, nous demandons le chiffre des dizaines. La calculatrice ne permettant (normalement) pas de répondre, nous annonçons que nous allons le faire avec Python (exercice 1 ci-après). Avant de donner cet exercice 1 à la maison, nous faisons une démonstration de Brython.info et de la manière d'écrire une puissance avec **.

EXERCICES AVEC PYTHON

Exercice 1

Sur l'éditeur de Brython.info, écrivez un programme qui :
– affecte à la variable n un nombre entier saisi par l'utilisateur ;
– affiche la valeur de n^n (utilisez ** pour les puissances).
Utilisez ce programme pour donner les chiffres des dizaines de 101^{101} et 102^{102}.
Recopiez le code du programme.

Exercice 2

Voici le code d'un programme.

```
def truc(x):
  if x * x < 0:
    y = 1
  else:
    y = 2
  return y
print(truc(3), truc(4))
```

On y trouve d'abord la définition de la fonction informatique `truc`, puis une commande d'affichage.
1. Sur l'éditeur de Brython.info, recopiez ce programme et exécutez-le.
2. Par quoi peut-on remplacer « 3 » ou « 4 » pour que « 1 » s'affiche quand on exécute le programme ?

Exercice 3

Voici le code d'un programme.

```
from math import sqrt
print("Saisir un nombre entier")
x = int(input())
y = sqrt(x)
if y == 20:
  print("Gagné")
else:
  print("Perdu")
```

NB : `sqrt` est l'abréviation de « square root » qui signifie en anglais « racine carrée ».
1. Recopiez ce programme sur l'éditeur de Brython.info, et exécutez-le plusieurs fois.
2. Quel nombre l'utilisateur doit-il saisir pour que « Gagné » s'affiche ?

Les exercices sont donnés un par un : **travail à la maison, puis en équipes, puis plénière**. Nous avons préparé à l'avance le programme sur Brython (les trois exercices sont disponibles en ligne : Exercice_1.py, Exercice_2.py et Exercice_3.py) et l'utilisons pendant les échanges. Les réponses sont notées directement sur la feuille d'énoncés.

Exercice 1
En fin de plénière, nous demandons d'écrire une fonction Python qui retourne n^n où n est l'argument (**travail individuel très bref**). Cette fonction est ensuite testée sur Brython.

Exercice 3
Nous insistons sur le « == » du test, nécessaire pour obtenir un booléen. Nous présentons la première ligne de code en disant : « Certaines fonctions informatiques comme `print`, `input` et `int` sont directement disponibles dans Python. Mais pour ne pas retarder l'exécution du programme, d'autres fonctions ne sont disponibles qu'une fois chargées depuis une bibliothèque. Comme Python a une grande communauté de développeurs, il existe des bibliothèques pour tous les domaines : jeux vidéo, sites web, et bien sûr mathématiques. » Depuis IDLE, il est possible de lire le code des bibliothèques écrites en Python. Pour des raisons d'efficacité, les fonctions de la bibliothèque `math` ne sont pas écrites en Python, mais celles de `random` le sont. Avec « File/Open Module » et en tapant « random », nous pouvons lire par exemple le code de `randint` qui a servi pour le jeu de la momie.

ÉTAPE 3

D'autres jeux avec python

Phase de prise en main des notions élaborées à l'étape 2 | ⏱ 1h20 en salle ordinaire et 55 minutes en salle informatique

JEU DU NOMBRE MYSTÈRE

Nous expliquons aux élèves la règle du jeu (voir plus bas), puis un premier élève, Jérôme, choisit un nombre et le fait deviner à un camarade en répondant seulement « Ton nombre est trop petit » ou « Ton nombre est trop grand » ou « Tu as gagné » aux tentatives de ce camarade. Puis nous disons : « Le but du travail d'aujourd'hui et de la prochaine séance en salle informatique est que chacun écrive un programme Python qui joue le rôle de Jérôme, c'est-à-dire demander à celui qui cherche le nombre de faire une tentative (une seule), puis répondre à cette tentative. Vous cacherez le nombre mystère dans une bibliothèque, je vous expliquerai quand nous serons en salle informatique. Quand votre programme sera fini, vous le ferez tester par un camarade qui cherchera à deviner le nombre mystère que vous aurez choisi. Mais parfois, écrire directement un programme en Python n'est pas facile. Vous allez commencer par écrire aujourd'hui un algorithme en français. Imaginez que cet algorithme soit à destination d'une informaticienne qui sait programmer en Python. Soyez bien précis pour qu'elle sache exactement ce qu'elle a à faire. » Nous illustrons ce dernier point en projetant le tableau suivant (diapositive 4).

ALGORITHME EN FRANÇAIS	PROGRAMME PYTHON

Demander à l'utilisateur de rentrer un nombre entier
Affecter ce nombre à x
Afficher x^x
	`print("Saisir un nombre entier")`
	`x = int(input())`
	`print(x**x)`

PROGRAMMATION DU JEU DU NOMBRE MYSTÈRE

Règles du jeu
Le premier joueur choisit secrètement un nombre mystère entier compris entre 1 et 1 000. Le second doit deviner ce nombre en faisant le minimum de tentatives. À chacune de ses propositions, le premier joueur peut seulement répondre « Ton nombre est trop petit » ou « Ton nombre est trop grand » ou « Tu as gagné ».

Écriture d'un algorithme
Vous devez écrire un algorithme à destination d'une informaticienne qui sait programmer en Python. Cet algorithme doit demander à celui qui cherche le nombre mystère de faire une tentative, puis répondre à cette tentative. Il ne doit pas contenir de boucle, il simule une seule tentative. Il doit être suffisamment précis pour que l'informaticienne sache exactement comment le traduire en Python.
Il peut contenir « nombre mystère » ainsi que les instructions :
– *Demander à l'utilisateur de taper un nombre entier et l'affecter à …*
– *Affecter … à …*
– *Afficher …*
– *Si … alors … sinon …*

Nous autorisons certains élèves, notamment les allophones, à écrire tout ou partie du texte en Python. **Travail individuel, puis en équipes** pour écrire une production collective, puis **plénière**. Les productions sont projetées et discutées. Nous suggérons fortement aux élèves, pendant l'élaboration d'un algorithme ou sa lecture, de jouer le rôle de l'ordinateur en exécutant le code mentalement et éventuellement en prenant des notes pour se rappeler la valeur des variables. Ce travail mental ne doit pas utiliser la connaissance du but de l'algorithme, mais uniquement se baser sur le code, comme l'ordinateur le fait.

Un ou deux exemples d'algorithmes sont photocopiés et annotés.

Nous profitons de l'évocation de ce travail d'implémentation d'un algorithme dans un langage pour dire que les premiers informaticiens ont été des informaticiennes, et présenter trois figures à l'aide du diaporama (diapositives 5 à 9).

Ada Lovelace (1815-1852) est connue pour avoir réalisé le premier programme informatique sur un ancêtre de l'ordinateur : la machine analytique de Charles Babbage. Le langage Ada a été nommé en son honneur. Dans la « note G » de son travail sur la machine de Charles Babbage (vers 1843), on peut lire ce qui souvent est considéré comme le premier véritable programme informatique au monde, car les algorithmes, jusque-là, ne sont pas décrits avec un formalisme, dans un langage véritablement destiné à être exécuté par une machine. À cette période, elle émet l'hypothèse que « la machine pourrait composer de manière scientifique et élaborée des morceaux de musique de n'importe quelle longueur ou degré de complexité[12] », ce qui se réalisera sous nos yeux environ 175 ans plus tard.

En 1949, âgée de 43 ans, **Grace Hopper** (1906-1992) rejoint l'équipe développant Univac I pour laquelle elle conçoit un compilateur, le premier programme de ce genre au monde, permettant de traduire un programme depuis un langage compréhensible par les humains vers un autre langage plus proche de la machine. À partir de 1957, elle défend l'idée qu'un programme devrait pouvoir être écrit dans un langage proche de l'anglais plutôt que d'être calqué sur le langage machine, comme l'assembleur. De cette idée naît le langage Cobol en 1959.

Katherine Johnson (1918-) est une des pionnières de la navigation astronomique informatisée. En 1952, elle rejoint à 35 ans un groupe de femmes de la NACA (ancêtre de la NASA) affecté aux calculs mathématiques, groupe qu'elle surnomme les « ordinateurs en jupe ». Elle parvient à s'affirmer dans un milieu très masculin et, en 1962, on lui demande de vérifier à la main des calculs de trajectoire informatisés : le chef de projet de la première mission américaine – consistant à envoyer un homme en orbite autour de la Terre – a en effet davantage confiance en elle qu'en des programmes exécutés par des machines. C'est en partie grâce à ses calculs que l'homme marche sur la Lune en 1969. Un hommage est rendu à ces « ordinateurs en jupes » à travers le film *Les Figures de l'ombre* (2017) dans lequel Katherine Johnson est l'une des trois héroïnes.

SIMULATION DU JEU DU NOMBRE MYSTÈRE EN SALLE INFORMATIQUE

Voici la marche à suivre.

1. Dans votre dossier Python personnel, éditez le programme **Cachette.py**. Recopiez-y le code ci-dessous et complétez-le discrètement à l'aide de votre nombre mystère que vos camarades devront deviner lorsqu'ils exécuteront le programme. Vous aurez ainsi défini la fonction `nb_mystere`, fonction sans argument qui retourne votre nombre mystère.

```
def nb_mystere():
  x = …
  return x
```

2. Dans ce même dossier, éditez le programme **Tentative.py** (vous renommerez le fichier par *Tentative_Prenom.py* sans accent). Ce programme doit simuler une tentative pour découvrir le nombre mystère et afficher suivant les cas : « Ton nombre est trop petit » ou « Ton nombre est trop grand » ou « Tu as gagné ». Son code doit commencer par `from cachette import nb_mystere`.
Ainsi, dans la suite du programme, l'appel `nb_mystere()` renverra le nombre mystère figurant dans la bibliothèque Cachette.py.

12 Ada Lovelace, « Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage », *Scientific Memoirs*, vol. 3, 1842.

3. Quand vous pensez que votre programme Tentative_xxx.py est correct, demandez à un camarade ou à votre professeur de deviner votre nombre mystère caché dans Cachette.py : pour cela, il a le droit d'exécuter le programme Tentative.py autant de fois qu'il le veut.

Ce deuxième **travail en salle informatique** a lieu le plus tôt possible après le travail précédent sur les algorithmes. **Travail individuel** pour lire l'énoncé sans regarder l'écran de l'ordinateur, puis **plénière**. Les élèves posent des questions. Nous projetons Aide Python n° 2.

Travail personnel avec entraide. Ceux qui ont terminé en avance écrivent une autre version du programme Tentative.py avec seulement deux `if` s'ils en ont utilisé trois (ou sans `else` s'ils ont utilisé `else`). Ils peuvent ensuite écrire une version avec une boucle *tant que* ou bien poursuivre l'exercice de la momie.

Plénière de régulation éventuelle où nous montrons au tableau les erreurs de syntaxe les plus fréquentes : oubli de « **:** », de l'indentation après `if` ou `else`, absence de parenthèses quand on appelle la fonction `nb_mystere`.

Quelques minutes après le début du travail, nous aidons ou faisons aider ceux qui n'auraient pas encore édité le programme Cachette.py.
Quand un programme nous semble intéressant pour une étude collective ultérieure ou pour être collé dans les cahiers, nous le copions sur une clé USB en gardant une trace du nom de l'auteur.
Nous testons nous-même le programme du premier élève qui pense avoir trouvé. S'il est correct, cet élève pourra ensuite tester les programmes de ses camarades et essayer de deviner leur nombre mystère.
Dix minutes avant la fin de la séance, ceux qui ont terminé nous secondent pour aider les moins rapides.
Cinq minutes avant la fin de la séance, chacun imprime son programme.

Chaque élève colle le code de son propre programme.

Plénière en salle ordinaire. Nous revenons sur la séance en salle informatique et expliquons que Cachette.py était une bibliothèque, c'est-à-dire un programme contenant des définitions de fonctions informatiques. La fonction `nb_mystere` était très simple puisqu'elle n'avait pas besoin d'argument pour être appelée et retournait toujours la même valeur. Puis nous projetons un programme d'élève récolté la veille, par exemple celui ci-après, qui comporte deux erreurs à retrouver (**travail individuel très bref**).
Nous projetons ensuite les programmes qui seront collés dans le cahier et les soumettons à la critique.
En fin de plénière, nous demandons comment améliorer la simulation du jeu. L'idée d'utiliser une boucle *tant que* émerge. Le lien avec la boucle du jeu de la momie est fait et nous en restons là.

```
from cachette import nb_mystere
print("Propose un nombre")
x = int(input())
if x < nb_mystere():
  print("Ton nombre est trop petit")
else:
  print("Ton nombre est trop grand")
if x == "nb_mystere":
  print("Tu as Gagné")
```

Un ou deux programmes accompagnés du nom de l'auteur sont annotés et collés.

EXERCICE DU MEILLEUR SCORE

Voici le code d'un programme.

```
def score(m):
  x = 0
  if m > -13:
    x = x + 1
  if m > -10 :
    x = x + 2
  else:
    x = x + 3
  if m == - 11:
    x = x - 4
  return x

print("Saisis un nombre entier")
n = int(input())
print("Ton score est", score(n))
```

1. Sur l'éditeur de Brython.info, recopiez ce programme et exécutez-le plusieurs fois.
2. Quel est le meilleur score qui puisse s'afficher lors de l'exécution du programme ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Nous provoquons les élèves en demandant comment faire pour que les instructions `x = x + 2` et `x = x + 3` soient exécutées toutes les deux à la fois. Nous utilisons le fichier Exercice_du_meilleur_score.py pour faire le bilan.

Soit n le nombre entier saisi.
Pour que 1 et 3 soient ajoutés à x, il faut et il suffit que $n > -13$ et $n \leq -10$.
Pour ne pas que 4 soit retiré à x, il faut et il suffit que $n \neq -11$.
Le meilleur score possible est 4 : il est obtenu en saisissant – 12 ou – 10.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous demandons aux élèves ce qui va s'afficher lors de l'exécution d'un programme qui commence par la définition d'une fonction Python simple et se termine par une commande d'affichage d'un ou plusieurs appels de cette fonction.
Étant donné un programme de calcul (par exemple : ajouter 5 puis diviser par 3), nous demandons aux élèves d'écrire une fonction Python qui lui corresponde.

SÉQUENCE 13

Algorithmique et programmation (2e partie) (AP2)

Au cycle 4, à travers l'élaboration de programmes, les élèves ont développé des méthodes de programmation et revisité les notions de variables et de fonctions sous une forme différente. Ils ont étudié la notion de variable informatique, le déclenchement d'une action par un événement, les séquences d'instructions, les boucles, les instructions conditionnelles.

PROGRAMME 2019

Algorithmique et programmation

– Boucle bornée (*for*), boucle non bornée (*while*).
– Programmer, dans des cas simples, une boucle bornée, une boucle non bornée.
– Fonction retournant un nombre aléatoire. Série statistique obtenue par la répétition de l'appel d'une telle fonction.
– Écrire des fonctions retournant le résultat numérique d'une expérience aléatoire, d'une répétition d'expériences aléatoires indépendantes.
– Pour des entiers a et b donnés, déterminer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b.

Vocabulaire ensembliste et logique

Lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou ».

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE ET CONSIDÉRATIONS SUR LES BOUCLES

– **Étape 1** : Outils pour la simulation d'expériences aléatoires avec Python (tirages aléatoires et boucles *faire n fois*).
– **Étape 2** : Boucles *tant que* et *pour*.
– **Étape 3** : Booléens, opérateurs *and* et *or*.
– **Étape 4** : Simulation de marches aléatoires.

Nous appelons boucle *pour* et boucle *tant que* les boucles « boucle bornée (*for*) » et « boucle non bornée (*while*) » du programme. Il n'y a pas de boucle *faire n fois* dans Python mais l'usage est d'utiliser le symbole « _ » pour une variable qui ne sera pas utilisée ; ainsi « for _ in range(4): » correspond à « faire 4 fois » (nous préférons dire « faire 4 fois » plutôt que « répéter 4 fois », ce qui sinon ferait 5 !). Enfin, nous abordons les boucles *pour* en dernier car les modifications du compteur d'une boucle *pour* sont implicites alors que la boucle *tant que* nous permet d'expliciter l'initialisation et l'incrémentation d'un compteur qui se comporte de la même façon que le compteur du *pour*.

ÉTAPE 1

Simulation de tirages aléatoires, boucle *faire n fois*

Phase de prise en main de notions du cycle 4 | ⏱ 55 minutes en salle informatique, puis 1 heure en salle ordinaire

OUTILS POUR LA SIMULATION D'EXPÉRIENCES ALÉATOIRES AVEC PYTHON

La fonction Python `randint(…, …)`

La fonction Python `randint(…, …)` est l'équivalent de la commande `ALEA.ENTRE.BORNES(…;…)` du tableur. En anglais, « random » signifie « aléatoire » et « randint » est la contraction de « random integer » (nombre entier aléatoire).

Pour utiliser la fonction informatique `randint`, écrivez « `from random import randint` » au début du programme.

Un jeu de hasard

Bob exécute le programme : `print(randint(1, 5))`

Si le nombre affiché est pair, il gagne 1 € ; sinon il perd 1 €. A-t-il intérêt à jouer ?

Simulation d'un saut de puce

Pour simuler un saut de puce, on veut écrire un programme qui affiche – 1 ou 1 avec équiprobabilité. Voici deux propositions.

Programme 1

```
print(randint(-1, 1))
```

Programme 2

```
if randint(0, 1) == 0:
  print(-1)
else:
  print(1)
```

Le programme 1 fait-il ce que l'on attend ?
Le programme 2 fait-il ce que l'on attend ?

On veut maintenant définir une fonction informatique `saut` qui retourne – 1 ou 1 avec équiprobabilité. Voici un programme incomplet.

```
def saut():
.............................................
.............................................
.............................................
x = saut()
y = saut()
print(x, y)
```

On trouve dans ce programme :
– la définition incomplète de la fonction `saut` qui est une fonction sans argument ;
– l'affectation des résultats de deux sauts simulés aux variables *x* et *y* ;
– l'affichage des résultats des deux sauts simulés.
Complétez la définition de la fonction `saut` de telle sorte qu'elle retourne – 1 ou 1 avec équiprobabilité.
Testez plusieurs fois le programme.

Une autre fonction sans argument

On considère le jeu suivant : « On lance une pièce équilibrée. Si pile sort, on gagne 10 € ; sinon, on perd 1 €. » Voici maintenant un programme incomplet :

```
def g():
................................................
................................................
................................................
a = g()
b = g()
c = g()
d = g()

print(a, b, c, d)
```

On trouve maintenant dans ce programme :
- la définition incomplète d'une fonction sans argument g qui retourne le gain après une partie simulée (g retourne 10 ou – 1) ;
- l'affectation des gains de quatre parties simulées aux variables a, b, c et d ;
- l'affichage des gains de chacune des quatre parties.

1. Complétez la définition de la fonction g, puis testez plusieurs fois le programme.
2. Ajoutez une ligne en fin de programme pour que s'affiche également le gain total après les quatre parties.

Trois programmes avec des boucles *faire n fois*

Éditez et exécutez chacun des trois programmes suivants.
Attention ! N'oubliez pas les espaces avant et après « _ », les indentations (décalages à droite d'un bloc de code) et les « : ».

Programme 1

```
for _ in range(5):
  print("Salut")
```

Programme 2

```
a = 0
for _ in range(3):
  a = a + 2
  print(a)
```

Programme 3

```
a = 0
for _ in range(3):
  a = a + 2
print(a)
```

Comment expliquer la différence d'affichage entre les deux derniers programmes ?

Simulation de plusieurs sauts de puce

Utilisez la fonction `saut` définie plus haut ainsi qu'une instruction du type `for _ in range(...)` pour écrire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre de sauts à effectuer, puis qui simule les sauts de la puce en affichant chacun des résultats – 1 ou 1.

Questions pour les rapides (au choix)

1. Rédigez un programme qui affiche 4 fois « Salut » (sur 4 lignes), puis 5 fois « Bonjour » (sur 5 lignes), puis à nouveau 4 lignes de « Salut » et 5 de « Bonjour »... avec en tout 6 blocs de saluts et de bonjours.
2. Créez une fonction `gain` qui simule le jeu « Pile on gagne 20 €, face on perd 7 € » et qui retourne le gain associé.

Les élèves écrivent le titre de la séquence.

La première séance se fait en **salle informatique**. Nous présentons la nouvelle séquence : « Nous avons simulé des marches aléatoires de la puce avec le tableur, nous allons maintenant le faire avec Python. Python offre davantage de souplesse : modification des paramètres plus aisée, réutilisation dans un programme plus complexe, etc. Apprendre Python vous permettra de faire des choses qu'un tableur ne peut pas faire, comme des jeux contenant des graphismes par exemple. Aujourd'hui, l'objectif est que vous compreniez les programmes distribués et soyez capables de répondre aux questions. Si pour cela vous avez besoin de les éditer avec IDLE ou sur le site Brython.info pour les tester, faites-le. L'énoncé doit être complété au crayon à papier. » La séance commence par une lecture silencieuse de la feuille, jusqu'au premier travail à faire. Les élèves sortent leur cahier de résumés et l'ouvrent à la page des instructions Python.

RETOUR EN SALLE ORDINAIRE SUR LE TRAVAIL MENÉ EN SALLE INFORMATIQUE

Simulation d'un saut de puce

Une fois la première question résolue, **travail individuel très bref** pour dire ce que peut afficher le programme `print(2 * randint(3, 5))`.

À la fin du programme contenant `x` et `y`, nous ajoutons `print(x + y)`, puis demandons ce que peut afficher ce nouveau programme et avec quelles probabilités (**travail individuel très bref**). Pour le bilan, nous dessinons un arbre.

Boucles *faire n fois*

La structure `for _ in range(n)` est présentée comme une boucle *faire n fois* (et non pas « répéter »). Pour le moment, c'est une boîte noire, c'est-à-dire que les élèves n'ont pas à en savoir davantage sur son fonctionnement.

Une fois les deuxième et troisième programmes étudiés, nous demandons ce qu'affiche le programme suivant (**travail individuel très bref**).

```
a = 10
for _ in range(3):
  a = a + 1
  print(a)
print(a)
```

La variable *a* est initialisée à 10 et incrémentée de 1 à chaque tour de boucle. On reconnaît un compteur au fait qu'il est initialisé, incrémenté, et au moins utilisé une fois au cours du programme (un simple affichage suffit).

EXERCICES AVEC DES BOUCLE *FAIRE N FOIS*

Exercice 1

```
from random import randint

x = 0
for _ in range(4):
  x = x + randint(0, 1)
print(x)
```

Que peut-il s'afficher quand on exécute ce programme ?

Exercice 2

```
from random import randint

def CroixPile():
  if randint(0, 1) == 1:
    return "croix"
  else:
..............................................
..............................................
..............................................

for _ in range(100):
  print(CroixPile())
```

On a commencé à écrire un programme qui simule 100 parties de Croix ou pile.
Complétez la définition de la fonction `CroixPile`.
Cette fonction doit retourner *croix* ou *pile-croix* ou *pile-pile* suivant les cas.

Exercice 3

On a défini une fonction `nb_div` (pour ceux que ça intéresse, la définition de cette fonction se trouve à la fin de l'exercice). Il s'agit d'une fonction avec un argument entier n et qui retourne le nombre de diviseurs positifs de n.

Par exemple, l'appel `nb_div(12)` retourne 6 car 12 a 6 diviseurs (1, 2, 3, 4, 6 et 12).

Que s'affiche-t-il quand on exécute le programme suivant ?

```
a = 2
for _ in range(6):
  if nb_div(a) == 2:
    print(a)
  a = a + 1
```

Définition de la fonction `nb_div`

```
def nb_div(n):
  nb = 0
  for i in range(1, n+1):
    # n % i calcule le reste de la division de n par i
    if n % i == 0:
      nb = nb + 1
  return nb
```

Exercice 1

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Une fois la réponse obtenue, nous modifions légèrement le programme (en remplaçant 1 par 2 ou bien en indentant `print(x)`, etc.) et demandons ce qui peut s'afficher. Nous expliquons que la variable x est un accumulateur, c'est-à-dire une sorte de compteur auquel on n'ajoute pas toujours la même valeur.

Exercice 2

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Le programme complété est exécuté.

Exercice 3

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour analyser ce qui se passe lors du premier passage dans la boucle.

Travail en équipes, puis plénière. Si besoin, nous utilisons le programme Nombres_premiers_avec_boucle_faire_n_fois.py.

Le début de l'étape 2 est fait juste après, toujours en salle ordinaire, si possible le même jour.

ÉTAPE 2

Boucles *tant que* et boucles *pour*

Phase de prise en main de notions du cycle 4 | ⏱ 1h30

Nous interrogeons les élèves : « Imaginez qu'il y ait maintenant deux puces ; l'une part de 0 et l'autre de 2. Que peut-on dire du moment où elles vont se rencontrer ? Est-il fréquent qu'il faille attendre plus de 20 sauts avant qu'elles ne se rencontrent ? Est-ce rare ? Très rare ? »

En imaginant comment simuler cette expérience aléatoire, nous arrivons à l'idée que nous avons besoin d'une boucle *tant que*. Nous disons : « Vous écrirez ce programme lors de la prochaine séance en salle informatique mais avant, nous allons étudier des exemples simples de boucle *tant que*. »

EXERCICE (AU TABLEAU)

Quel est le plus grand multiple de 281 inférieur ou égal à 100 000 ?

Travail individuel, puis plénière. Il est possible d'utiliser une division. On peut aussi tâtonner en calculant différents multiples de 281. On peut enfin automatiser la recherche avec Python. On part de 0 puis on ajoute 281. Est-ce que cela suffit ? Non, donc on ajoute encore 281, etc. Jusqu'à quand faut-il ajouter 281 ? (**travail individuel très bref**). Il émerge qu'on doit ajouter 281 au nombre testé tant qu'il est inférieur ou égal à 100 000. On en déduit ensuite le résultat.

EXERCICE DU PLUS GRAND MULTIPLE

```
multiple = 0
while ............................................... :
    .....................................................
print (...........................................)
```

Ce programme incomplet comporte une boucle *tant que* (*while* en anglais). Après `while` figure une condition. Tant que cette condition est vérifiée, l'instruction indentée de la ligne suivante est exécutée ; quand la condition n'est plus vérifiée, le programme passe à la ligne suivante, ici `print(...)`.
Complétez le programme de manière à ce qu'il affiche le plus grand multiple de 281 inférieur ou égal à 100 000.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Un élève au clavier teste les propositions sur Brython. Une fois l'exercice résolu, nous passons aux premières utilisations d'une boucle *tant que* en demandant ce qu'affichent des programmes tels que :

```
p = 1
while p <= 5:
  p = p * 2
print(p)
```

Les élèves complètent le programme avec « multiple <= 100 000 », « multiple = multiple + 281 » et « multiple – 281 ».
Puis ils écrivent :
Le plus grand multiple de 281 inférieur ou égal à 100 000 est 355 × 281 = 99 755.

EXERCICES AVEC DES BOUCLES *TANT QUE*

Exercice 1

```
def seuil(a, b):
..............................................
..............................................
..............................................
    return ..............................................
```

Ce programme incomplet comporte la définition d'une fonction avec deux arguments entiers positifs a et b.
Complétez la définition de cette fonction appelée `seuil` de telle sorte qu'elle retourne le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b.
Par exemple `seuil(281, 100000)` doit retourner 99 755.

Exercice 2

```
nombre = 1
while ............................................... :
..............................................
..............................................
..............................................
```

Complétez ce programme de telle sorte qu'il affiche le plus petit nombre entier strictement positif dont le cube dépasse 15 000.

Exercice 3

```
compteur = 1
while saut() == 1 :
  compteur = compteur + 1
print(compteur)
```

La fonction `saut` utilisée dans ce programme est celle utilisée en salle informatique.
Donnez une interprétation du résultat affiché par ce programme.
Cette interprétation doit être en lien avec la marche aléatoire de la puce.

Travail à la maison pour l'exercice 1, puis **en équipes**, puis **plénière**. Idem pour les exercices 2 et 3.

Les programmes des exercices 1 et 2 sont complétés.
Le dernier programme affiche le numéro du premier saut à gauche.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous demandons ce qu'affiche un programme simple avec une boucle *tant que* ou ce que retourne une fonction simple avec une boucle *tant que*.

EXERCICE DES PREMIERS NOMBRES PREMIERS

```
a = 2
for _ in range(6):
  if nb_div(a) == 2:
    print(a)
  a = a + 1
```

On rappelle que ce programme passe en revue six entiers consécutifs à partir de 2 et affiche ceux qui sont premiers.
Écrivez un programme qui effectue le même travail – tester les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7 et afficher ceux qui sont premiers – mais cette fois-ci, le programme doit utiliser une boucle *tant que* au lieu d'une boucle *faire n fois*.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière.

```
a = 2
while a <= 7:
  if nb_div(a) == 2:
    print(a)
  a = a + 1
```

Nous ouvrons Nombres_premiers_avec_boucle_for.py

```
for a in range(2, 8):
  if nb_div(a) == 2:
    print(a)
```

Nous disons : « Voici la première "vraie boucle *pour*" de l'année. Ce programme est équivalent aux précédents, mais il est plus court car il comporte une boucle *pour* (*for* en anglais) avec gestion automatique de la variable a. Dans ce programme, le compteur a prend successivement les valeurs 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

Après chaque passage dans la boucle, le compteur a augmente automatiquement de 1 (pas besoin d'écrire `a = a + 1`). Attention, a s'arrête à 7 et non pas à 8 ! » Nous demandons ce qu'affiche chacun des programmes suivants (ils sont projetés l'un après l'autre).

```
for i in range(1, 6):
  print(i)
```

```
for j in range(-2, 2):
  if j > 0:
    print(j)
```

Pour faire la même chose, le mieux est d'utiliser une boucle « pour » :

```
for a in range(2, 8):
  if nb_div(a) == 2:
    print(a)
```

Sans qu'on ait besoin d'écrire « $a = a + 1$ », la variable a prend successivement les valeurs 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Attention ! Elle s'arrête à 7 et non à 8.

EXERCICES AVEC DES BOUCLES *POUR*

Exercice 1

```
s = 0
for k in range(1, 4):
  print(k)
  s = s + k
print(s)
```

Que s'affiche-t-il quand on exécute ce programme ?

Exercice 2

```
p = 1
for n in range(2, 5):
  p = p * n
print(p)
```

Que s'affiche-t-il quand on exécute ce programme ?

Les exercices sont donnés un par un. **Travail individuel, puis en équipes, puis plénière**.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous demandons aux élèves ce qu'affiche un programme simple avec une boucle *pour* ou ce que retourne une fonction simple avec une boucle *pour*.

ÉTAPE 3

Manipulation de booléens

Phase d'élaboration | 45 minutes

Cette étape est facultative, nous ne la faisons que si nous avons le temps.

EXERCICE DES NOMBRES PREMIERS

On dispose à nouveau de la fonction `nb_div` qui retourne le nombre de diviseurs du nombre entier positif donné en argument.

1. Écrivez une fonction qui permet de savoir si un nombre est premier. Cette fonction s'appellera `premier` et prendra en argument un nombre entier positif.
2. Utilisez la fonction `premier` afin d'écrire un programme qui affiche la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
3. (Question pour les rapides) Utilisez la fonction `premier` afin d'écrire une fonction qui affiche les 50 premiers nombres premiers.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Nous allons concentrer l'attention des élèves sur les différentes valeurs que leurs fonctions `premier` retournent. Nous faisons remarquer que les fonctions ne peuvent retourner que deux valeurs. Nous interrogeons les élèves sur les deux valeurs qu'ils ont utilisées et les consignons au tableau.

	SI N EST PREMIER, LA FONCTION RETOURNE…	SI N N'EST PAS PREMIER, LA FONCTION RETOURNE…
Béatrice	`"oui"`	`"non"`
Jacques	`"premier"`	`"pas premier"`
Sakinatou	`"vrai"`	`"faux"`
Sefora	`1`	`0`
Illiès	`True`	`False`

Nous disons que dans ce genre de cas, les informaticiennes et les informaticiens utilisent plutôt les booléens (et ajoutons « et la communauté Python » à côté du prénom d'Illiès) ; « premier » et « pas premier » semblent plus lisibles pour les humains mais les booléens permettront d'aller plus loin par la suite.

1. *La fonction d'Illiès est recopiée accompagnée du nom de son auteur.*
2. *Un programme correct est recopié.*

EXERCICE DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX

Écrivez une fonction Python nommée `premier_jumeau` qui permet de savoir si un nombre n et le nombre n+2 sont tous les deux premiers. Pour écrire cette fonction, vous pouvez utiliser la fonction `premier` définie dans l'exercice des nombres premiers.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Nous projetons les fonctions `premier_jumeau` qui ne font pas appel à l'opérateur `and`, mais qui utilisent par exemple deux `if` imbriqués. Si personne n'y a pensé, nous montrons (dans une console) comment fonctionne l'opérateur `and` qui correspond au « et » logique (nous en profitons pour parler de l'opérateur `or`) :

```
>>> True and True, True and False, False and True, False and False
(True, False, False, False)
>>> True or True, True or False, False or True, False or False
(True, True, True, False)
```

Travail individuel pour réécrire les fonctions `premier` et `premier_jumeau` en faisant en sorte qu'elles retournent maintenant des valeurs booléennes. Nous projetons quelques propositions. À la fin, nous montrons que Python permet d'écrire du code court et lisible :

```
def premier(n):
  return nb_div(n) == 2
def premier_jumeau(n):
  return premier(n) and premier(n+2)
```

Un programme utilisant « True » et « False » est recopié.

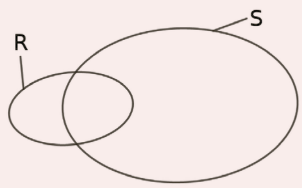
EXERCICE DE L'INVITATION EN PYTHON

Pour sélectionner les gens qu'elle invite à sa fête samedi, Élisa envoie à ses connaissances un programme Python. Ils doivent exécuter le programme et, suivant ce qui s'affiche, ils sauront s'ils sont invités ou non.
Pour qu'un maximum de personnes soient invitées, Élisa doit-elle écrire `and` ou `or` à la place des pointillés ?

```
print("Es-tu sympa ? Réponds 1 pour oui, 0 pour non.")
sympa = int(input())
print("Es-tu riche ? Réponds 1 pour oui, 0 pour non.")
riche = int(input())
if sympa == 1 .............. riche == 1:
  print("Je t'invite samedi.")
else:
  print("Tu pourras rester devant ta télé samedi.")
```

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Au cours du débat, nous demandons de dessiner un diagramme de Venn qui illustre la situation (**travail individuel très bref**). Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Instructions de Python (2e partie).

Si Élisa met « and », seuls les gens à la fois sympas et riches seront invités.
Elle a intérêt à mettre « or » pour que les gens qui sont seulement sympas ou seulement riches soient aussi invités.



ÉTAPE 4

Algorithmes et programmes de simulations de marches aléatoires

Phase d'approfondissement | ⏱ 1 heure en salle ordinaire et 55 minutes en salle informatique

Nous disons : « Le travail d'aujourd'hui et de la prochaine séance en salle informatique constitue un aboutissement de ce que nous faisons depuis plusieurs jours. Vous disposez maintenant d'outils – les trois types de boucle, les fonctions informatiques, la fonction `randint` – que vous allez pouvoir utiliser pour étudier les marches aléatoires d'une puce et même de deux puces ! En particulier, vous allez simuler 10 000 marches aléatoires de 10 sauts et déterminer le nombre de retours à 0, objectif que nous nous étions fixé après avoir constaté que l'arbre associé à une marche de 10 sauts était trop compliqué pour être dessiné. Parfois, écrire directement un programme en Python n'est pas facile. On peut alors commencer par écrire un algorithme en français. On peut imaginer que cet algorithme est à destination d'une informaticienne qui sait programmer en Python. Il faudra être suffisamment précis pour qu'elle sache ce qu'elle doit faire. » Nous illustrons ce dernier point en projetant le tableau suivant.

ALGORITHME EN FRANÇAIS	PROGRAMME PYTHON
Affecter 0 à a.	`a = 0`
Faire 3 fois : ajouter 2 à a.	`for _ in range(3):` `    a = a + 2`
Afficher a.	`print(a)`

ALGORITHMES DE SIMULATIONS DE MARCHES ALÉATOIRES

Vous devrez écrire des algorithmes à destination d'une informaticienne qui sait programmer en Python. Ces algorithmes doivent être suffisamment précis pour qu'elle sache exactement comment les traduire en Python. Ils peuvent comporter les quatre opérations (+, -, *, /), des nombres aléatoires (par exemple « 0 ou 1 avec équiprobabilité ») et les instructions suivantes.

Affecter … à la variable …
Afficher …
Si … alors …
Faire … fois …
Pour … allant de … à …
Tant que … faire …

Algorithme 1
Simulation de 10 sauts et affichage de la position finale d'une puce qui a effectué ces 10 sauts.

Algorithme 2
Simulation de 10 000 marches de 10 sauts et affichage du nombre de fois où la puce a terminé sa marche en 0.
Vous pouvez faire appel à l'algorithme 1.

Algorithme 3 (pour les rapides)
Simulation des marches aléatoires de deux puces dont l'une part de 0 et l'autre de 2 et affichage du numéro du saut où elles se rencontrent pour la première fois.

Nous autorisons certains élèves, notamment ceux qui ne sont pas à l'aise avec la langue écrite, à écrire tout ou partie du texte en Python.

Travail individuel pour l'algorithme 1 entrecoupé par une **plénière de régulation**. Quelques élèves dont les productions sont intéressantes lisent le début de leur algorithme et les autres réagissent.

Travail individuel, puis **en équipes** pour écrire une production collective, puis **plénière**. Les productions sont projetées. Nous rappelons aux élèves qu'ils auront à éditer les programmes correspondant à ces algorithmes lors de la prochaine séance en salle informatique.

Nous procédons de la même manière pour l'algorithme 2.

Les élèves recopient certains des algorithmes proposés.

SIMULATION DE MARCHES ALÉATOIRES EN SALLE INFORMATIQUE

Vous avez des programmes et fonctions Python à écrire. Une fois les programmes terminés et vérifiés, copiez-les dans un fichier texte. À la fin de la séance, imprimez-les et collez-les dans le cahier de bord.

Exercice 1
Écrivez un programme Python qui correspond à l'algorithme 1 de l'exercice précédent.

Exercice 2
Définissez une fonction `PositionFinale` avec un argument `n`.
Cette fonction simule `n` sauts et retourne la position finale de la puce.

Exercice 3
Écrivez un programme Python qui correspond à l'algorithme 2.

Exercice 4
Définissez une fonction `StatistiquesPositionFinale` avec un argument `p`.
Cette fonction simule 10 000 marches de 10 sauts et retourne le nombre de fois où la puce a terminé sa marche en `p`.

Exercice 5 (pour les rapides)
Écrivez un programme Python qui correspond à l'algorithme 3.
En Python, la condition « x est différent de y » s'écrit : `x != y`.

Ce travail est fait en **salle informatique**. Il a lieu le plus tôt possible après le travail sur les algorithmes qui précède. Les élèves ont deux cahiers ouverts à côté d'eux : le cahier de bord avec les algorithmes précédents, leur cahier de résumés avec les dernières instructions Python distribuées.
Le bilan est fait en **salle ordinaire**. Des élèves viennent devant le clavier écrire les programmes.
Des photocopies de programmes corrects correspondant aux exercices 1 à 4 sont disponibles. Ceux qui n'ont pas réussi les collent.

FONCTIONS

Considérations générales sur les fonctions

COVARIATION ET CORRESPONDANCE

Sylvie Grau, docteure en sciences de l'éducation, écrit : « Des tests ont montré qu'en fin de collège, le vocabulaire et les notations liés aux fonctions sont globalement maîtrisés mais les élèves n'utilisent pas ces symboles pour effectuer des traitements, ils servent uniquement à désigner des objets[13]. » Elle identifie également une cause importante de cette difficulté : « L'aspect fonctionnel est essentiellement abordé en utilisant la relation entre deux séries de nombres dans l'idée de processus input/output et néglige l'étude de la covariation de deux grandeurs[14]. » On peut en effet regarder une même fonction sous deux angles différents :
– la correspondance, où l'on regarde comment obtenir $f(x)$ à partir de x. La fonction étant une relation de dépendance entre deux grandeurs, on peut mettre en correspondance les valeurs de la première grandeur avec celles de la deuxième ;
– la covariation, où l'on regarde comment varie $f(x)$ lorsque x varie. La relation de dépendance entre les deux grandeurs fait que lorsque la grandeur indépendante varie, la grandeur dépendante « réagit » (voir p. 213 ce que nous entendons par grandeurs « indépendante » et « dépendante »).

Comme l'ont fait d'autres chercheurs auparavant, Sylvie Grau et Valériane Passaro, membre du département de didactique de l'université de Montréal, préconisent de faire davantage porter le regard des élèves sur la covariation, ce qui présente également l'intérêt de préparer l'étude de la dérivation en classe de première[15]. Une approche covariationnelle est une manière de travailler la fonction en situation. Elle consiste en l'étude approfondie des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire d'un travail sur leurs accroissements concomitants dans des situations dans lesquelles on s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie.

Différentes formes de travail sur les accroissements concomitants

Analyse de la covariation de deux grandeurs par lecture graphique
– Exercice de la fin du monde (p. 214) : c'est le sens de variation des fonctions f_1 et f_2 au voisinage de 14 et 42,5 qui permet de trancher.
– Exercice du pluviomètre (p. 222) : une réponse est fournie par le prolongement d'une courbe en respectant la progressivité des changements de pente.

Utilisation de la covariation pour tracer la courbe d'une fonction
– Exercice du cycliste (p. 218) et premier exercice du fichier Exercices de prise en main et d'approfondissement de F1 : les élèves doivent se faire une idée de la covariation du temps et de l'ordonnée d'un point mobile pour tracer la courbe d'évolution de cette dernière.
– Exercice du croisement (p. 229) : le tracé de la courbe de l'évolution de la distance entre Rozenn et Nantes s'appuie sur les valeurs des accroissements concomitants du temps et de cette distance.

---

13 Sylvie Grau, *Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines*, Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, université de Nantes, 2017.

14 *Id.*

15 Valériane Passaro, *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans*, Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, université de Montréal, 2015.

Lien entre sens de variation et valeurs d'une fonction
Exercice du test auto (p. 225) : le problème de la compatibilité entre un tableau de variations et un tableau de valeurs amène les élèves à se poser des questions du type : « Est-ce que la consommation peut diminuer quand la vitesse augmente de telle valeur à telle valeur ? ».

Calculs de taux de variation
Exercice de la cible (p. 135) et suivants : ce sont des considérations liées à des taux de variations qui permettent d'atteindre les cibles.

Unités de raisonnement

D'autre part, Valériane Passaro identifie un certain nombre d'« unités de raisonnement » par lesquelles les élèves passent lors d'un raisonnement covariationnel. Sylvie Grau pense que « la progression dans ces unités est nécessaire pour tous les élèves, c'est-à-dire qu'on a ici les éléments à travailler dans l'ordre pour tous[16] ». L'idée est donc de travailler explicitement des unités pour les élèves les plus en difficulté. À titre indicatif, voici ces premières unités ainsi que des exemples d'exercices où nous les faisons spécifiquement travailler à nos élèves.

Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante
Exercices de la fin du monde (p. 214), du pluviomètre (p. 222), du jardin potager (p. 233).
Dans l'exercice de la fin du monde et l'exercice du pluviomètre, l'organisation des données dans un tableau est laissée à la charge de l'élève, ce qui l'amène à identifier clairement les grandeurs en jeu et donne une première approche globale de la fonction.

Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs
Tous les exercices des séquences F1 (p. 212) et F2 (p. 228).

Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente
Exercice de la fin du monde (p. 214).

Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante
Exercices du cycliste (étude de la courbe au voisinage de $t = 0$) (p. 218) et du croisement (tracé des deux courbes) (p. 229).

Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même).
Exercice du cycliste (p. 218), exercices où il faut déterminer un sens de variation.

Ces pistes fournies par les chercheurs en didactique des mathématiques semblent prometteuses mais sont encore largement inexplorées. Notre propre travail gagnerait certainement à être approfondi dans le sens d'une meilleure prise en compte du travail de Sylvie Grau sur les fonctions affines et de celui de Valériane Passaro sur les unités de raisonnement.

FONCTIONS PRATIQUES ET FONCTIONS THÉORIQUES

On trouve dans le programme 2019 : « Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre *graphiquement* ou algébriquement une équation […] du type $f(x) = k$. » Or, résoudre graphiquement une telle équation implique de se fier à un graphique dont la précision est nécessairement limitée. Par exemple, si l'unité sur l'axe des abscisses mesure moins de 3 cm, la précision d'une solution obtenue par lecture graphique ne peut pas excéder 1/100e. Cette résolution d'équation – c'en est bien une d'après le programme – est de nature bien différente de la résolution algébrique de l'équation $f(x) = 2$ pour la fonction carré, résolution pour laquelle on ne saurait se contenter de la valeur approchée 1,414. Comment concilier ces deux points de vue ? Comment expliquer aux élèves qu'il faut parfois donner une valeur exacte et que parfois une valeur approchée suffit ?

16 Sylvie Grau, *op. cit.*

À la suite de Stella Baruk, chercheuse et autrice du *Dictionnaire de mathématiques élémentaires* (Seuil, 1995, rééd. 2019) et de Sylvie Grau dans sa thèse de doctorat en sciences de l'éducation, *Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines* (2017), nous proposons de distinguer deux types de fonctions :

– les *fonctions pratiques* dont les propriétés peuvent être obtenues par lecture graphique ;
– les *fonctions théoriques* dont les propriétés ne peuvent découler que de raisonnements ou de calculs dans le cadre de la théorie mathématique et dont les représentations graphiques ne permettent que de faire des conjectures les concernant.

Dans l'exercice du jardin potager (p. 233), une lecture graphique suffit à déterminer le maximum de la fonction A qui associe à un côté x du potager son aire $x(35 - 2x)$. Le problème étant un problème pratique, la fonction A est aussi pratique, et il n'est pas nécessaire de mettre $A(x)$ sous forme canonique ou d'utiliser un quelconque théorème pour obtenir son maximum. La résolution par lecture graphique est simple, apporte une précision suffisante et les élèves ne comprendraient pas l'intérêt d'en faire davantage. En revanche, l'étude des signes de la fonction $f : x \longmapsto 17x - 3$ ne saurait s'appuyer uniquement sur une courbe affichée sur l'écran d'une calculatrice : la fonction f est théorique.

On trouve également dans le programme 2019 : « Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines. » Dans une situation intra-mathématique, on modélise par une fonction théorique. Par exemple, en classe de seconde, la détermination de la distance d'un point à une droite est un problème de géométrie abstraite (on ne saurait se contenter de mesurer cette distance sur une figure) : on peut modéliser ce problème à l'aide d'une fonction théorique (p. 238) dont on cherche le minimum. Dans une situation issue des autres disciplines, il suffit en général de modéliser par une fonction pratique. Par exemple dans l'exercice de la concentration en sucre (p. 234), la dose quotidienne maximale autorisée pour un aliment est fonction de sa concentration en sucre. Nous la modélisons par la fonction pratique $D : c \longmapsto 25 \div c$ dont on peut trouver les valeurs par lecture graphique après interpolation des points d'une hyperbole.

Nous expliquons également aux élèves qu'une fonction théorique peut être définie par un programme de calcul ou une expression comme $f(x)=\sqrt{x^2+(3-1{,}5x)^2}$. Une telle fonction s'applique à des nombres « infiniment précis » et donne aussi des nombres « infiniment précis ». Au contraire, une fonction pratique peut être définie par une courbe ou un tableau de valeurs (on trouvait encore dans le programme de seconde de 2017 l'expression « fonction [...] définie par une courbe ») ; les valeurs qu'elle prend ne sont pas infiniment précises, elles peuvent dépendre de la précision d'une mesure ou bien de la précision d'une lecture graphique.

En géométrie et en probabilités, nous commençons si possible par des problèmes « pratiques » avant d'aborder des problèmes plus théoriques (voir p. 76 et 103). Nous faisons de même pour les fonctions. Nos séquences F1 et F2 sont consacrées aux fonctions pratiques, respectivement après les vacances d'automne et les vacances du nouvel an. Les élèves y découvrent de manière intuitive les notions d'extremum et de sens de variation, sans qu'aucune démonstration théorique ne soit nécessaire. Après les vacances de printemps, quand ils sont à l'aise en calcul littéral, nous abordons les fonctions théoriques dans la séquence F3. Cette progression admet néanmoins une exception : pour ne pas nous priver des fonctions (théoriques) associées à des programmes de calcul, nous introduisons quelques fonctions affines théoriques dans les séquences de calcul littéral, mais sans faire référence à leurs courbes représentatives ni à des résultats les concernant. Les expressions « fonction pratique » et « fonction théorique » ne sont utilisées avec les élèves que dans F3.

PROGRESSION CONCERNANT LES FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Nos partis pris concernant l'enseignement des fonctions en seconde consistent, d'une part, à proposer autant que possible des fonctions pratiques avant des fonctions théoriques et, d'autre part, à attendre que les élèves soient entraînés en calcul littéral avant de l'appliquer à l'étude des fonctions théoriques. Cependant, les élèves ayant déjà étudié au collège les fonctions linéaires et affines théoriques, il serait dommage d'attendre la fin de l'année pour en reparler. Dès lors, nous adoptons une progression en quatre parties, décrites ci-après.

– Nous profitons du travail sur les programmes de calcul des séquences CL1, CL2 et CL3 consacrées au calcul littéral pour réactiver les définitions des fonctions linéaires et affines théoriques, uniquement sous l'angle « correspondance », sans aborder la question des courbes représentatives ni celle de la différence entre fonctions pratiques et théoriques (nous parlons simplement de *fonctions*). Il s'agit juste de réactiver les formes générales $x \longmapsto ax$ et $x \longmapsto ax + b$, leurs liens avec les programmes de calcul « Multiplier par a » et « Multiplier par a puis ajouter b », et le fait qu'une fonction linéaire s'annule en 0, ce qui fournit un moyen de montrer qu'une fonction n'est pas linéaire.
– Dans la séquence F2, l'exercice du croisement (p. 229) et l'exercice du téléchargement (p. 232) font appel à une modélisation à l'aide de fonctions linéaires et affines pratiques. Les résultats sur les courbes de ces fonctions sont réactivés, ce qui permet aux élèves de les tracer en plaçant un ou deux points seulement.
– En conclusion de la séquence G4 sur les équations de droites, les coefficients directeurs des droites représentant les fonctions linéaires et affines de la séquence F2 apparaissent comme taux d'accroissement des grandeurs considérées.
– Enfin, dans la séquence F3 sur les fonctions théoriques, nous abordons les autres nouveautés du programme de seconde sur les fonctions linéaires et affines : leurs signes et leurs sens de variation. L'expérience a montré qu'il valait mieux attendre la fin de l'année pour aborder ces sujets plus difficiles qu'il n'y paraît.

SÉQUENCE 14

Fonctions pratiques sans formule (F1)

Pour les élèves, le titre de cette séquence est simplement « Problèmes faisant intervenir des fonctions ».
Au cycle 4, la dépendance de deux grandeurs a été traduite par un tableau de valeurs, une formule, un graphique. Les représentations graphiques ont permis de déterminer des images et des antécédents, qui ont été interprétés en fonction du contexte. Les fonctions ont été utilisées pour modéliser des phénomènes continus et résoudre des problèmes.

PROGRAMME 2019

Fonctions

– Consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre.
– Exploiter […] le registre graphique.
– Étudier les notions liées aux variations et aux extremums des fonctions.
– La modélisation d'une dépendance par une fonction apparaît dans des domaines très variés : géométrie dans le plan […], biologie, économie, physique […]. La modélisation de phénomènes dépendant du temps, la variable étant alors notée t est mise en évidence.
– Les outils numériques sont mis à profit : un logiciel de géométrie dynamique, pour la représentation graphique […].

– Relier représentation graphique et tableau de variations.
– Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
– Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) \leq k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique [...].

Nombres et calculs

– Intervalles de $\mathbb{R}$.
– Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

La distinction entre fonctions pratiques et théoriques (voir p. 210) sera abordée avec les élèves dans la séquence F3 : pour le moment, nous parlons simplement de fonctions. Avant cette séquence, seules des fonctions (théoriques) associées à un programme de calcul ont été rencontrées, et les courbes représentatives n'ont quasiment pas été évoquées. Ici, les fonctions étudiées sont pratiques, donc la donnée de leur courbe représentative suffit à établir des résultats les concernant. Par ailleurs, beaucoup de questions posées donnent lieu à un travail sur la covariation de deux grandeurs (voir p. 209), travail auquel nous accordons une importance particulière.

– **Étape 1** : Il s'agit uniquement de problèmes d'évolution temporelle, les fonctions étant plus ou moins données dans l'énoncé. Les notions de courbe représentative, d'image, d'antécédent sont réactivées. Les élèves découvrent celles d'extremum, de sens de variation, de tableau de variations. Ils résolvent graphiquement des équations ou inéquations du type $f(t) = y_0$; $f(t) \leq y_0$ et $f(t) \geq y_0$. En lien avec le sens de variation, les élèves découvrent les intervalles $[a ; b]$, puis les réutilisent pour décrire l'ensemble des solutions d'une inéquation. La description de l'ensemble des solutions d'une équation est l'occasion de découvrir les ensembles finis, dont l'ensemble vide, et leurs notations. Le devoir à la maison sur le modèle proie-prédateur dans l'exercice des lynx et des lièvres est l'occasion d'un travail de réflexion sur la modélisation.
– **Étape 2** : Cette étape fait intervenir des fonctions avec des grandeurs autres que le temps. Pour résoudre le problème du pluviomètre, les élèves introduisent eux-mêmes une fonction. D'autre part, à partir du sens de variation d'une fonction, ils comparent des images. Ils résolvent graphiquement des équations et des inéquations du type $f(x) = g(x)$; $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.

Grandeurs dépendantes et indépendantes

Dans des contextes pratiques comme ceux de cette séquence, nous parlons de « grandeurs » plutôt que de variables, sans exiger de vocabulaire particulier de la part des élèves. Quand une grandeur G_2 « dépend » d'une autre grandeur G_1, la fonction qui modélise cette dépendance peut être notée $f : G_1 \longmapsto G_2$. Dans cette situation, le physicien écrit en général $G_2 = f(G_1)$ ou $G_2(G_1)$. Nous utilisons la notation $G_1 \longmapsto G_2$ sans en abuser pour ne pas faire obstacle au travail sur la covariation. G_2 est forcément une variable dépendante, c'est-à-dire une variable qui varie sous l'influence d'autres variables, par exemple G_1 (attention au mot *influence* qui n'a pas toujours une signification causale). La variable G_1 peut être indépendante, comme le temps, ou bien dépendante, comme dans l'exercice du pluviomètre.

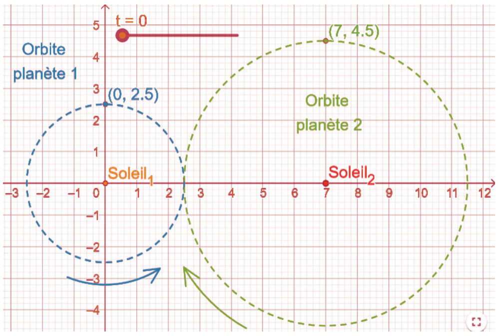
ÉTAPE 1

Variations d'une grandeur en fonction du temps

Phase d'élaboration des notions de sens de variation et d'extremum d'une fonction, d'intervalle [*a* ; *b*] | ⏱ 4h15

EXERCICE DE LA FIN DU MONDE

Dans une galaxie très lointaine se trouvent deux soleils et deux planètes. Chaque planète suit un mouvement circulaire uniforme autour de « son » soleil.

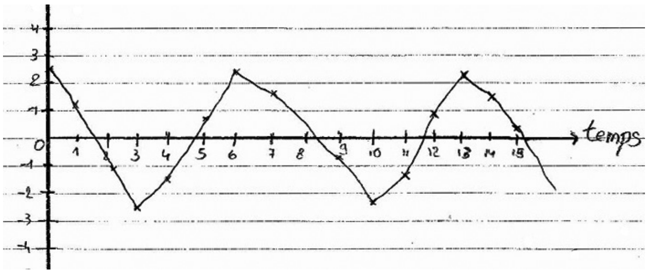


Les habitants de la planète 1 voudraient savoir si les deux planètes vont entrer en collision un jour ou l'autre. Ils disposent des relevés des positions des planètes depuis les 10 derniers milliards de secondes.
Vous pouvez obtenir ces positions en faisant varier le curseur t entre 0 et 10 sur la page huit.re/fin-du-monde (l'unité de temps est le milliard de secondes).
On note y_1 et y_2 les ordonnées des planètes 1 et 2.
Une physicienne de la planète 1 a résolu le problème en étudiant l'évolution de y_1 et y_2 en fonction du temps. Elle a commencé par faire un tableau de quelques valeurs de y_1 en fonction de t, puis elle a représenté sur un graphique l'évolution de y_1 en fonction du temps, pour t allant de 0 à 15.
Faites un tableau de valeurs et une courbe qu'elle aurait pu obtenir.

Sans distribuer l'énoncé, nous présentons le problème à l'aide de Fin_du_monde_(brut).ggb où les planètes sont sur un fond blanc, sans repère ni quadrillage. Nous faisons varier le curseur de 0 à 10. Les élèves proposent des pistes de résolution. Nous demandons quelles sont les grandeurs variables du problème. Il émerge qu'il serait utile d'introduire un repère pour repérer les planètes, ce qui permettrait de considérer, en plus du temps t, les abscisses x_1 et x_2 et les ordonnées y_1 et y_2 des planètes. Nous allons alors sur la page huit.re/fin-du-monde et refaisons une démonstration. Nous expliquons : « Les quatre coordonnées sont des *grandeurs dépendantes* car elles varient sous l'influence du temps. Le temps est une *grandeur indépendante* car il varie sans être influencé par les autres grandeurs du problème. » Puis nous demandons à quelle condition sur x_1, x_2, y_1 et y_2 il y a collision (**travail individuel très bref**). Une fois la condition $x_1 = x_2 = 2{,}5$ et $y_1 = y_2 = 0$ obtenue, nous disons : « Une physicienne de la planète 1 a résolu le problème en étudiant l'évolution de y_1 et y_2 en fonction du temps (elle aurait aussi pu s'intéresser aux abscisses). Vous allez vous mettre à sa place et commencer par un tableau de valeurs et une représentation graphique de y_1 en fonction de t. Savez-vous faire cela ? » Nous en discutons un peu avec les élèves et montrons comment démarrer, sans en dire trop, en particulier sans induire de choix des valeurs de t. Enfin, nous distribuons l'énoncé en demandant aux élèves qui seraient bloqués de décrire leurs difficultés par écrit.

Travail à la maison. Le graphique ayant posé des difficultés à beaucoup d'élèves, nous organisons une **plénière de régulation** où ils expriment les obstacles rencontrés et où d'autres les aident ou leur donnent des pistes. Ceux qui n'ont pas réussi refont le **travail à la maison** pour la séance suivante.

Plénière. Nous projetons d'abord des productions permettant de mettre en évidence les erreurs suivantes : absence de légendes sur les axes ; des points non reliés ; une courbe qui ne commence pas à t = 0 ; le maximum ou le minimum de l'ordonnée non respecté, etc. Puis nous projetons une courbe avec des points reliés par des segments, par exemple celle de Dina ci-après.



Nous distribuons à tous une photocopie de cette courbe et écrivons au tableau : « D'après cette courbe, quelles sont les ordonnées de la planète 1 à $t = 3$, à $t = 3{,}5$ et à $t = 4$? » (**travail individuel très bref**). Une fois les valeurs obtenues, nous vérifions sur huit.re/fin-du-monde : il apparaît que les valeurs sont bonnes pour $t = 3$ et $t = 4$ mais pas pour $t = 3{,}5$. Pourquoi ? Il émerge qu'il ne fallait pas relier les points d'abscisse 3 et 4 par un segment. Nous montrons alors Fin_du_monde_avec_une_courbe.ggb où des points de la courbe se tracent au fur et à mesure jusqu'à $t = 10$. Ainsi, pour tracer correctement la courbe, il faut placer suffisamment de points avant de les relier « avec de beaux arrondis ».

Enfin, nous demandons comment tracer la courbe après $t = 10$. Des élèves disent que la planète retourne à la même position tous les 6,3 milliards de secondes. Nous le vérifions sur huit.re/fin-du-monde, puis demandons si c'est le cas sur la courbe de Dina (**travail individuel très bref**). Nous demandons la valeur de y_1 pour $t = 11$ (**travail individuel très bref**). Une ou deux courbes allant jusqu'à $t = 15$ sont projetées et soumises à la discussion.

Un tableau de valeurs et le graphique de Dina sont collés. Sur ce dernier, les élèves ajoutent la légende y_1 sur l'axe des ordonnées, ainsi que les traits de construction permettant de déterminer l'ordonnée à $t = 3{,}5$, puis écrivent :

D'après la courbe, on a $y_1 = -2{,}1$ à $t = 3{,}5$. Or, la bonne valeur est $y_1 = -2{,}34$. Cet écart important s'explique par le fait qu'il ne fallait pas relier les points d'abscisse 3 et 4 par un segment.

Il y a d'autres erreurs sur cette courbe car la planète retourne à la même position tous les 6,3 milliards de secondes.

Nous disons : « Nous allons maintenant voir comment les mathématiciennes et les mathématiciens envisagent le problème. Comme y_1 dépend du temps, ils disent que y_1 est fonction du temps, autrement dit qu'*il existe une fonction f_1 telle que* $y_1 = f_1(t)$. Ils écrivent aussi $f_1 : t \longmapsto y_1$. La courbe que vous avez tracée est la courbe de la fonction f_1 pour t entre 0 et 15. Souvent, les fonctions f que vous avez vues avaient une expression analytique, par exemple $f(x) = 4x + 5$. Ici, comme la planète a une vitesse constante, on pourrait trouver une expression de $f_1(t)$ en fonction de t mais elle est hors de portée en seconde. »

Les élèves écrivent le titre de la séquence, à savoir « Problèmes faisant intervenir des fonctions ».

EXERCICE DE LA FIN DU MONDE (SUITE)

Un mathématicien prend connaissance de l'idée de la physicienne et la traduit en langage mathématique. Comme les ordonnées y_1 et y_2 dépendent du temps t, il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $y_1 = f_1(t)$ et $y_2 = f_2(t)$.

Ces deux fonctions se notent aussi $f_1 : t \longmapsto y_1$ et $f_2 : t \longmapsto y_2$.

1. Quelle est l'image de 0 par la fonction f_1 ?
2. Quelle est l'image de 6,3 par la fonction f_1 ?
3. Quelle est l'image de 3,15 par la fonction f_1 ?
4. Quelle est la valeur de $f_2(0)$?
5. (Question pour les rapides)

On considère la fonction $g_1 : t \longmapsto x_1$ où x_1 est l'abscisse de la planète 1.

On sait que la planète 1 retourne à la même position tous les 6,3 milliards de secondes.

Traduisez cela à l'aide des fonctions f_1 et g_1.

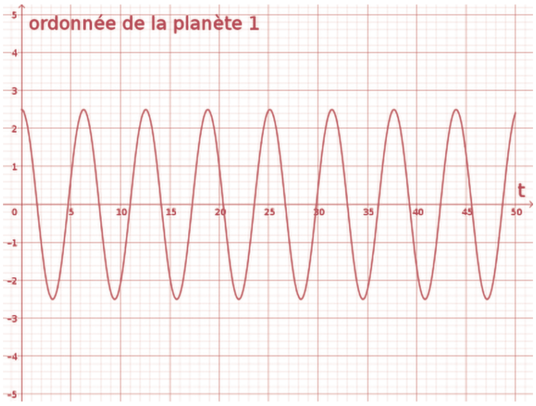
Travail individuel entrecoupé éventuellement par une **plénière de régulation** pour rappeler ce qu'est une image.

Travail en équipes, puis plénière. En fin de plénière, nous discutons des différentes significations du mot « fonction » en mathématiques, en particulier des différences entre les fonctions vues jusque-là – des fonctions associées à des programmes de calcul – et les fonctions f_1 et f_2 d'aujourd'hui. Par exemple, pour f_1 et f_2, il n'y a pas de formule (enfin, pas pour le moment…).

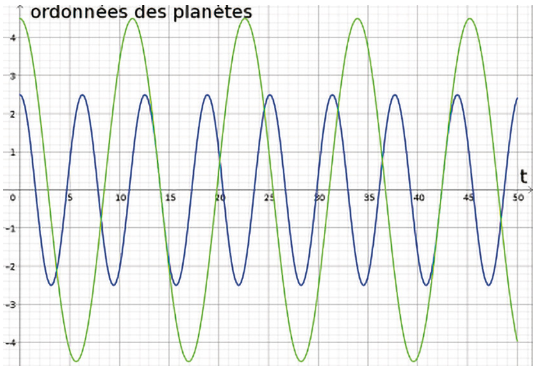
1. $f_1(0) = 2{,}5$	2. $f_1(6{,}3) = 2{,}5$	3. $f_1(3{,}15) =- 2{,}5$	4. $f_2(0) = 4{,}5$

EXERCICE DE LA FIN DU MONDE (SUITE ET FIN)

Voici la courbe de la fonction f_1 entre $t = 0$ et $t = 50$, tracée à l'aide de GeoGebra.
Allez sur huit.re/fin-du-monde et tracez soigneusement, sur ce même graphique, la courbe de la fonction f_2 sur l'intervalle de temps [0 ; 50].



Travail à la maison, puis plénière. Une ou deux productions d'élèves sont projetées. La planète 2 fait un demi-tour en 5,65 Gs, donc un tour complet en 11,3 Gs. Après la plénière, les élèves dont la courbe n'est pas satisfaisante la corrigent ou collent le graphique ci-dessous, à disposition sur le bureau.

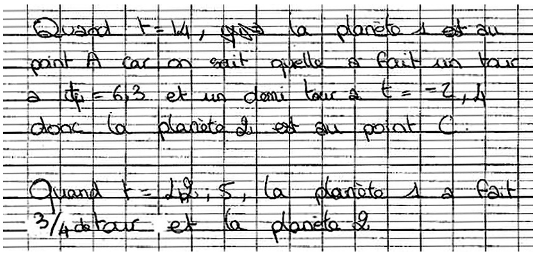


Nous écrivons au tableau la question suivante : « Y aura-t-il collision entre les deux planètes avant $t = 50$? »

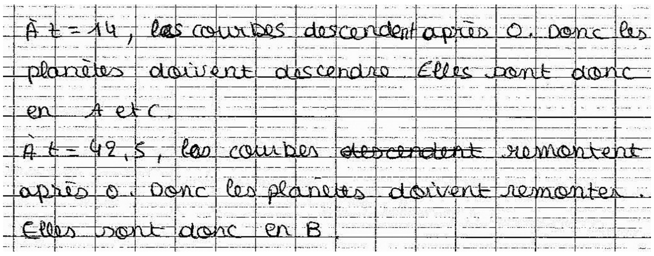
Travail individuel entrecoupé assez rapidement par une **plénière de régulation** pour mettre en commun les propositions. Un élève dit qu'il y a collision vers $t = 3{,}5$ car les deux courbes se croisent à cet instant. Un autre élève invalide cette proposition, puis on constate que pour $t \simeq 3{,}7$, on a bien $y_1 = y_2$ mais, pour autant, les deux planètes ne sont pas au même endroit.
Ensuite, il émerge que pour qu'il y ait collision à un instant t, il faut que $f_1(t) = 0$ et $f_2(t) = 0$, donc $t = 14$ et $t = 42{,}5$ sont des dates possibles de collision. Le problème est de savoir où sont les planètes à ces dates. Nous plaçons les points $A(– 2{,}5 ; 0)$, $B(2{,}5 ; 0)$ et $C(11{,}5 ; 0)$ sur un schéma au tableau pendant que les élèves font de même sur leur énoncé. Le travail reprend, ceux qui pensent avoir terminé convertissent la date trouvée en années terriennes.

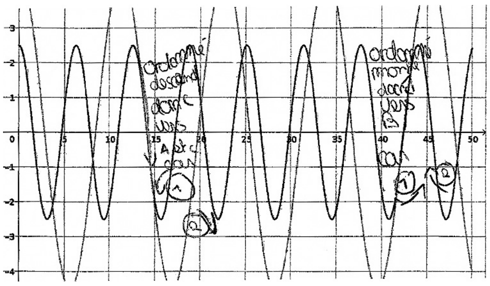
Travail individuel, puis en équipes pour rédiger une réponse commune. Nous donnons à chaque équipe un nouvel exemplaire des courbes de f_1 et f_2 : les équipes peuvent écrire sur cette feuille pour expliquer leur raisonnement.

Plénière. Nous projetons des productions d'équipes. En voici trois exemples.


Quand t = 14, ~~alors~~ la planète 1 ~~est~~ est au point A car on sait qu'elle a fait un tour à t = 6,3 et un demi tour à t = 2,1 donc la planète 2 est au point C.

Quand t = 42,5, la planète 1 a fait 3/4 de tour et la planète 2


À t = 14, les courbes descendent après 0. Donc les planètes doivent descendre. Elles sont donc en A et C.
À t = 42,5, les courbes ~~descendent~~ remontent après 0. Donc les planètes doivent remonter. Elles sont donc en B



Nous étudions d'abord ce qui se passe à $t = 14$, puis passons à $t = 42{,}5$. Des équipes essayent de suivre la position des planètes le long des courbes depuis $t = 0$, mais ce n'est pas facile à exprimer, surtout pour $t = 42{,}5$.
D'autres équipes raisonnent sur le sens de variation des fonctions au voisinage de 14 et de 42,5.
Les élèves s'expriment librement, en utilisant notamment les termes *monter* et *descendre*. Tout en mettant en avant l'intérêt de la démarche, nous expliquons que ce ne sont pas les termes employés dans le langage mathématique : nous les donnerons une fois l'exercice résolu.

Pour illustrer les propos des élèves, nous jonglons avec Fin_du_monde_tmax=50.ggb et Fin_du_monde_avec_deux_courbes.ggb. Ils permettent notamment d'obtenir avec plus de précision le premier instant pour lequel $y_1 = y_2 = 0$, à savoir 14,15.

Le verdict tombe enfin : la fin du monde aura lieu à la date 42,5 Gs, c'est-à-dire en l'an 1348 !

Pour finir, à l'aide d'un clic droit dans la fenêtre Algèbre d'un des fichiers GeoGebra, nous montrons aux élèves qu'il y a des formules derrière les fonctions et les courbes. Nous disons : « Comme $f_1(t) = 2{,}5\sin(t + \frac{\pi}{2})$, la courbe de f_1 est une *sinusoïde*. Et le 6,3 qu'on a trouvé est en fait une valeur approchée de 2π. »

Nom:	Planète_1
Définition:	(2.5cos(t + π / 2), 2.5sin(t + π / 2))

Une ou deux productions d'équipes sont collées et annotées, avec notamment la conclusion suivante :
La fin du monde se produira donc à $t = 42{,}5$.

SENS DE VARIATION, INTERVALLES [*a* ; *b*]

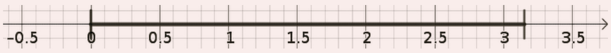
Comme annoncé, nous introduisons le vocabulaire mathématique lié au sens de variation d'une fonction. Nous projetons le dessin qui figure dans le bilan ci-après et, à partir de phrases d'élèves telles que « la fonction descend jusqu'à 3,15 », nous arrivons aux formulations « f_1 est décroissante sur [0 ; 3,15] » et « f_1 est croissante sur [3,15 ; 6,3] ». Nous disons : « Par définition, l'intervalle [0 ; 3,15] est l'ensemble des nombres x tels que $0 \le x \le 3{,}15$. C'est pour vous un nouvel objet mathématique : ce n'est ni un nombre, ni une figure géométrique, c'est un *ensemble de nombres*, c'est-à-dire une collection de nombres qu'on met ensemble. Ces nombres sont les éléments de cet ensemble, ce sont les nombres compris entre 0 et 3,15 inclus. Les mathématiciennes et les mathématiciens le notent avec des crochets, comme les segments en géométrie, et le représentent par un segment inclus dans une droite graduée (nous faisons le dessin). Il y a d'autres types d'intervalles de nombres, nous les étudierons plus tard dans l'année. » Dans la séquence G2, nous avions commencé à installer le vocabulaire et les notations ensemblistes (élément, $\in$, $\notin$) sans les institutionnaliser. Nous continuons à les installer ici à l'aide de quelques questions rapides sur des intervalles $[a ; b]$.

Nous montrons ensuite comment résumer les variations de la fonction f_1 sur l'intervalle [0 ; 6,3] dans un tableau de variations. Nous terminons par la définition d'une fonction croissante sur un intervalle (quand x augmente en restant dans l'intervalle, alors $f(x)$ augmente), d'une fonction décroissante et d'une fonction monotone.

Le bilan est fait à partir du bilan F1 n° 1 ci-dessous qui comporte une erreur à corriger par les élèves (le dernier « diminue » est à remplacer par « augmente »). Nous distribuons un seul document contenant ce bilan suivi de l'exercice du cycliste.

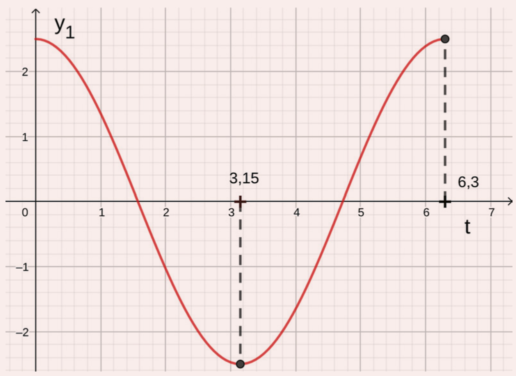
Intervalles de nombres (exemple)

L'intervalle [0 ; 3,15] est l'ensemble des nombres compris entre 0 (inclus) et 3,15 (inclus).
Par exemple, 2 est un élément de cet intervalle et 6,3 n'en est pas un : on écrit $2 \in [0 ; 3{,}15]$ et $6{,}3 \notin [0 ; 3{,}15]$.
Les éléments de l'ensemble [0 ; 3,15] sont les nombres x tels que $0 \leq x \leq 3{,}15$ où « ≤ » signifie inférieur ou égal.
On peut le représenter par le segment ci-dessous.



Variations de la fonction f_1 sur l'intervalle [0 ; 6,3]

On a tracé ci-contre la courbe représentative de f_1 sur l'intervalle [0 ; 6,3] :
- La plus grande valeur de y_1 est 2,5.
  On dit que 2,5 est le maximum de la fonction f_1 sur l'intervalle [0 ; 6,3].
  Ce maximum est atteint en t = 0 et t = 6,3.
- La plus petite valeur de y_1 est – 2,5.
  On dit que – 2,5 est le minimum de la fonction f_1 sur l'intervalle [0 ; 6,3].
  Ce minimum est atteint en t = 3,15.
- Lorsque t augmente de 0 à 3,15, l'ordonnée y_1 diminue.
  On dit que la fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle [0 ; 3,15].
- Lorsque t augmente de 3,15 à 6,3, l'ordonnée y_1 augmente.
  On dit que la fonction f_1 est croissante sur l'intervalle [3,15 ; 6,3].



On résume les variations de f_1 dans ce tableau de variations.

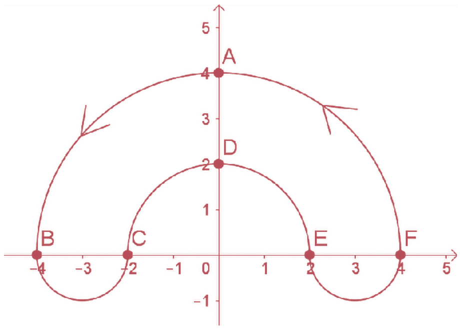
t	0	3,15	6,3
Variations de $f_1(t)$	2,5 ↘	– 2,5	↗ 2,5

Définitions

Une fonction f est croissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ augmente quand x augmente en restant dans l'intervalle.
Une fonction est décroissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ diminue quand x diminue en restant dans l'intervalle.
Une fonction est monotone sur un intervalle lorsqu'elle est croissante sur cet intervalle ou décroissante sur cet intervalle.

EXERCICE DU CYCLISTE

Un cycliste roule à vitesse constante sur le circuit représenté ci-après et effectue deux tours de circuit. Au départ, il est au point A puis parcourt le circuit dans le sens $ABCDEFA$. Il met 8 minutes pour effectuer un tour, donc 16 minutes pour deux tours.
Sur la grille distribuée avec l'énoncé, tracez la courbe représentative de la fonction $f : t \longmapsto y$ où t est le temps écoulé depuis le départ en minutes et y l'ordonnée du cycliste.



En même temps que l'énoncé, nous distribuons une grille (Grille_Cycliste). Nous poursuivons la suite de la séquence pendant les allers-retours décrits ci-après. En particulier, nous commençons l'exercice des températures ci-dessous dès que l'exercice de la fin du monde est terminé.

Travail à la maison à rendre. Nous annotons les productions et indiquons sur chacune le travail à faire pour la prochaine fois : soit tout reprendre ; soit améliorer certains points ; soit, si le travail est presque parfait, démontrer que le cycliste arrive en B au bout de 2 minutes, en C au bout de 3 minutes, etc.

Plénière de régulation pour étudier une ou deux erreurs, notamment une courbe où l'ordonnée diminue trop vite au voisinage de $t = 0$, puis conjecturer que le cycliste arrive en B au bout de 2 minutes, en C au bout de 3 minutes, etc. Enfin, nous rendons les productions et donnons à certains une nouvelle grille vierge.

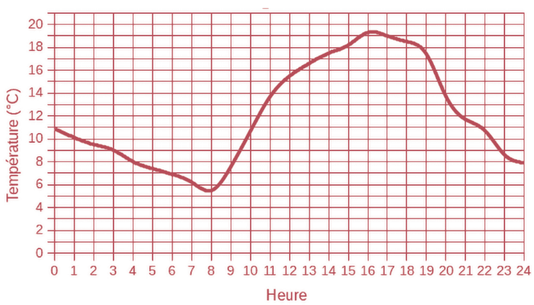
Deuxième travail à la maison. Nous annotons une deuxième fois les productions. Si besoin, certains élèves retravaillent une troisième fois la courbe à la maison.

Plénière. Nous projetons à nouveau une ou deux courbes. Un élève expose rapidement sa démonstration du fait que le cycliste arrive en B au bout de 2 minutes.

Chaque élève colle sa production annotée. En outre, une courbe tracée avec GeoGebra (Courbe du cycliste) est collée par ceux qui le souhaitent.

EXERCICE DES TEMPÉRATURES

Un site de météo fournit une courbe des températures à Nantes pour la journée du 2 octobre 2016.
Soit la fonction $f : H \longmapsto T$ où H est l'heure et T la température en degré Celsius.
1. Quelle a été la température la plus élevée et à quelle heure a-t-elle été atteinte ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
2. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
3. Quelles sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 14 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
4. Dressez le tableau de variations de la fonction f.
5. (Question pour les rapides) À quelle heure de la journée la température descend-elle la plus vite ?
6. (Question pour les rapides) Quelle est la plus grande valeur possible de $f(t + 1) - f(t)$ lorsque t est compris entre 0 et 23 ?



Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Question 3. Nous employons le mot « antécédent », mettons en garde concernant les articles (**un** antécédent, **l'**image) et donnons deux moyens mnémotechniques :
– quand on écrit « $11 \longmapsto 14$ », le 11 est *avant* le 14, ce qui est à rapprocher de « 11 est un *antécédent* de 14 » ;
– *tout est dans l'ordre alphabétique* : « abscisse » vient avant « ordonnée », « antécédent » avant « image », « x » avant « y » et « horizontal » avant « vertical », pour se souvenir quel axe utiliser pour les lectures.

Information pour éclairer les élèves sur la réponse à la question 5 : le soleil s'est couché à 19 h 43 ce 2 octobre 2016 à Nantes.

3. Deux points de la courbe ont pour ordonnée 14, ils ont pour abscisse 11 et 20. Autrement dit l'équation $f(t) = 14$ a deux solutions qui sont 11 et 20. Ou encore 14 a deux antécédents par f et ces antécédents sont 11 et 20.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS, ENSEMBLE DES SOLUTIONS, ENSEMBLES FINIS

Travail individuel très bref pour résoudre l'équation $f(H) = 12$ d'inconnue H, puis **plénière**. Un élève vient au tableau expliquer sa méthode sur l'image projetée. Le lien avec la recherche des antécédents de 12 est fait.
Nous faisons de même pour l'équation $f(H) = 5$, puis pour l'inéquation $f(H) \geq 14$ après avoir discuté de ce qu'est une inéquation ainsi que de la différence entre $>$ et $\geq$, puis pour l'inéquation $f(H) \leq 7$.

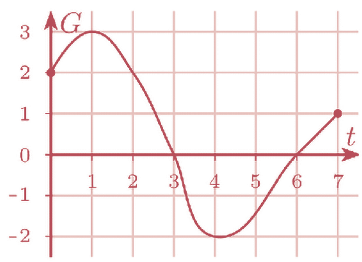
Nous expliquons que les mathématiciennes et les mathématiciens aiment bien conclure la résolution d'une équation ou d'une inéquation en donnant l'ensemble des solutions, généralement noté S.
Travail individuel très bref pour écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(H) \geq 14$, puis **plénière**. On voit ici un autre intérêt des intervalles $[a ; b]$.
Travail individuel très bref pour écrire l'ensemble des solutions de l'équation $f(H) = 12$, puis **plénière**. Un élève propose [10,4 ; 20,8], un autre élève l'invalide. Nous introduisons alors la notation des ensembles finis non vides, en faisant remarquer que l'ordre n'a pas d'importance : ici, on peut écrire S = {10,4 ; 20,8} ou bien S = {20,8 ; 10,4}.
Travail individuel très bref pour écrire l'ensemble des solutions de l'équation $f(H) = 5$, puis **plénière**. Nous introduisons la définition et la notation de l'ensemble vide.

Les deux derniers ensembles sont très différents des ensembles étudiés jusque-là (voir p. 131 et 217). Nous faisons remarquer que les ensembles {10,4 ; 20,8} et Ø n'ont qu'un nombre fini d'éléments (deux et zéro) alors que les droites et les intervalles de nombres $[a ; b]$ avec $a < b$ en ont une infinité. Autre différence : on a défini les ensembles {10,4 ; 20,8} et Ø en donnant la liste de leurs éléments et non pas une condition telle que « l'ensemble des points d'abscisse 4 » ou « l'ensemble des nombres compris entre 3,15 et 6,3 ».

Le bilan est fait à l'aide du bilan F1 n° 2 contenant les solutions et ensembles des solutions des quatre équations ou inéquations précédentes, ainsi que les notations de l'ensemble vide et de quelques ensembles finis. L'énoncé de l'exercice qui suit est sur le même document.

EXERCICE DE LA FONCTION DÉFINIE PAR UNE COURBE

G est une grandeur qui dépend du temps t. Voici ci-contre la courbe de la fonction $f : t \longmapsto G$.
Complétez les phrases suivantes et le tableau de variations.
L'image de 3 par f est ....
Le nombre .... est un antécédent de 1 par f.
Le minimum de f est .... Ce minimum est atteint en ....
L'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 0$ est ....
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \leq 1$ est ....



t	
Variations de $f(t)$	

Il s'agit du premier exercice décontextualisé sur les fonctions : les élèves lisent l'énoncé et font part de leurs interrogations.

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

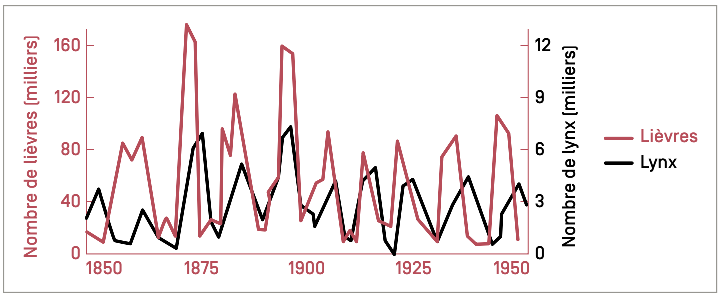
Nous posons des questions similaires à celles de l'exercice précédent (à l'aide d'une courbe projetée ou distribuée).

EXERCICE DES LYNX ET DES LIÈVRES

Dans une région du nord du Canada vivent des lynx du Canada et des lièvres arctiques. Quand ils sont en nombre suffisant, les lièvres sont les principales proies des lynx : un lynx consomme en moyenne environ 185 lièvres par an.

Première partie : estimations à partir de statistiques

La Compagnie de la Baie d'Hudson est une entreprise qui commercialise les fourrures fournies par les trappeurs de cette région. Pendant un siècle, elle a tenu des statistiques du nombre de fourrures de lynx et de lièvres vendues par les trappeurs à son comptoir de la Baie d'Hudson.
À partir de ces statistiques, un biologiste américain a estimé le nombre de lynx et de lièvres pendant cette période et obtenu un graphique similaire à celui-ci.

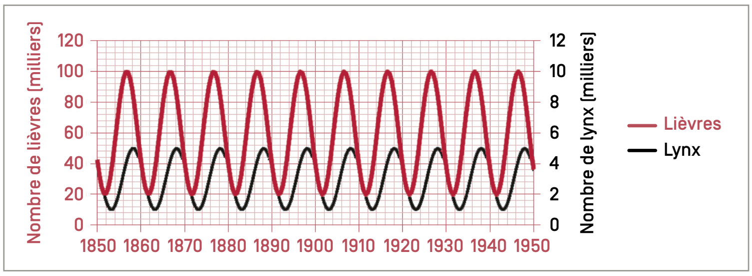


D'après « Évolution de la population de lynx et lièvres arctiques » (statistiques de la Compagnie de la Baie d'Hudson), in Louis-Marie Bonneval, « Proies et prédateurs », bulletin de l'APMEP n° 501, 2012, p. 534.

La courbe des lièvres est en rouge ; c'est celle qui monte le plus haut.
La courbe des lynx est en noir ; attention, il faut utiliser les graduations à droite du graphique pour les lynx.
1. D'après ce graphique, combien y avait-il de lynx et de lièvres en 1875 ?
2. Le graphique semble indiquer que le nombre de lynx est tombé à 0 un peu avant 1925. Est-ce possible ?
3. Visiblement, les deux courbes ont été obtenues en plaçant des points puis en reliant ces points par des segments. Que pensez-vous de cette méthode ?
4. En 1942, Charles Elton et Mary Nicholson, deux biologistes anglais, ont été les premiers à remarquer des variations approximativement périodiques des populations de lynx en Amérique du Nord. Le graphique confirme-t-il cette observation ?

Deuxième partie : modèle mathématique

Le mathématicien italien Vito Volterra a proposé en 1926 un modèle mathématique simplifié de l'évolution du nombre de proies et de prédateurs pour des écosystèmes ressemblant à celui des lièvres et des lynx. Les modèles de ce type peuvent aider à réguler la chasse ou la pêche dans le but de préserver les espèces.
En appliquant un de ces modèles aux lynx et aux lièvres précédents, on obtient un deuxième graphique.



Attention, pour les lynx, il faut utiliser les graduations à droite du graphique.
On note t la date en années. Par exemple 1887,5 correspond au 1er juillet 1887.
On note $v(t)$ et $x(t)$ les nombres de lièvres et de lynx (en milliers) à la date t d'après le deuxième graphique. Par exemple, $v(1857) = 100$ et $x(1858) = 5$.
5. Quelles sont les solutions de l'équation $v(t) = 100$?
6. Déterminez le minimum et le maximum de la fonction v. Même question pour la fonction x.
7. Dressez le tableau de variations de la fonction v sur l'intervalle de temps [1857 ; 1867]. Même question pour la fonction x.
8. On peut penser que dans la nature, quand les lynx sont peu nombreux, le nombre de lièvres augmente et que, lorsque les lynx sont nombreux, le nombre de lièvres diminue. Est-ce le cas d'après le graphique entre 1857 et 1867 ?
9. On critique parfois les modèles mathématiques en disant qu'ils simplifient trop la réalité. Peut-on faire cette critique ici ?

Devoir à la maison avec la deuxième option pour les aides intermédiaires (voir p. 45) :
- **pour J +4** : faire un brouillon et préparer des questions sur ce qui pose problème ;
- **plénière de régulation** : difficultés et questions sont mutualisées. Des aides sont fournies. La simplification inhérente à toute modélisation est évoquée ;
- **pour J +7** : faire le devoir sur feuille.

Plénière. Un bilan est fait à partir des productions, puis les copies corrigées sont rendues.

ÉTAPE 2

Fonctions avec des grandeurs autres que le temps

Phase de prise en main de la notion de fonction et de notions élaborées à l'étape 1 | ⏱ 3 heures

EXERCICE DU PLUVIOMÈTRE

Monsieur Legoff, habitant du nord du Finistère, a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour, il mesure la hauteur d'eau dans son pluviomètre, puis il le vide. Il a consigné dans un tableau chaque hauteur d'eau relevée du 1er au 15 mars 2019.

DATE	1er MARS	2 MARS	3 MARS	4 MARS	5 MARS	6 MARS	7 MARS	8 MARS	9 MARS	10 MARS	11 MARS	12 MARS	13 MARS	14 MARS	15 MARS
Hauteur d'eau dans le pluviomètre (mm)	0	0	0	0	38	76	127	89	38	117	129	107	89	0	72

Monsieur Legoff a remarqué que sa cave était inondée lorsque, sur une journée, la hauteur d'eau de son pluviomètre atteignait 142 mm.
Il doit s'absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte le site de la météo locale et obtient les données des tableaux ci-après.
Monsieur Legoff doit-il s'inquiéter pour sa cave ?

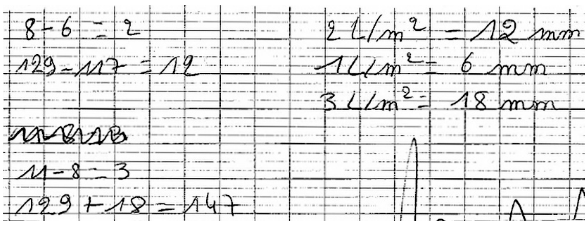
RELEVÉS MÉTÉO	
DATES	PLUVIOMÉTRIE (L/m²)
1er mars	0
2 mars	0
3 mars	0
4 mars	0
5 mars	0,2
6 mars	1,6
7 mars	7,5
8 mars	2,6
9 mars	0,2
10 mars	6
11 mars	8
12 mars	4,6
13 mars	2,6
14 mars	0
15 mars	1,4

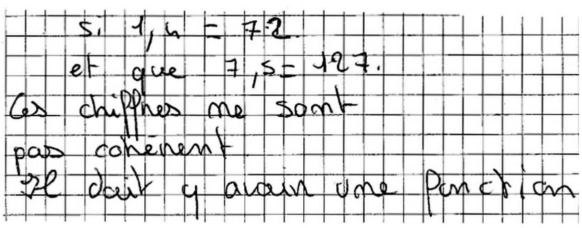
PRÉVISIONS MÉTÉO	
DATES	PLUVIOMÉTRIE (L/m²)
16 mars	3,2
17 mars	4
18 mars	3,4
19 mars	7
20 mars	1,2
21 mars	11

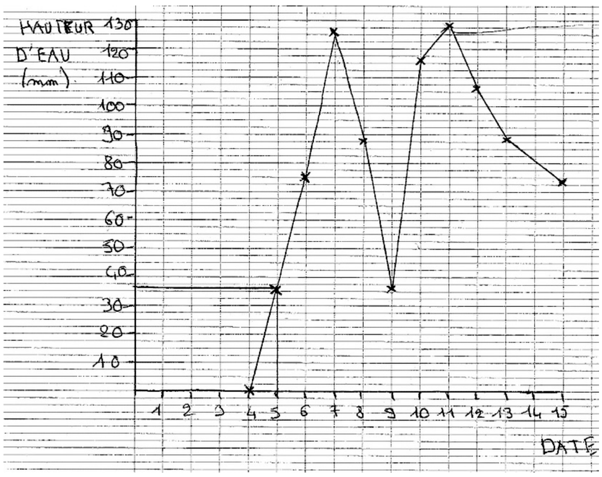
Cet exercice a été conçu et testé par Driss Badaoui, Sylvie Grau et Christian Judas du groupe Fonctions de l'IREM de Nantes[17]. C'est l'étude des covariations des deux grandeurs *H* (hauteur d'eau dans le pluviomètre) et *P* (pluviométrie) qui permet de répondre.

Les élèves lisent l'énoncé et posent leurs questions. Nous montrons la photo d'un pluviomètre (voir p. 225) pour les aider à se représenter la situation et abordons les points suivants :
– le pluviomètre est vidé chaque jour ;
– une pluviométrie de 1 L/m² signifie que sur une surface de 1 m², il est tombé 1 litre d'eau.
– une valeur donnée de *H* correspond-elle à une valeur donnée de *P*, et réciproquement ? Nous demandons : « Si la pluviométrie est de 6 L/m², peut-on connaître la hauteur d'eau dans le pluviomètre ? » ou bien : « Si M. Legoff relève 89 mm d'eau dans son pluviomètre, peut-on connaître la pluviométrie ? ».

Travail individuel assez long, puis **en équipes**, puis **plénière de régulation**. Les premières propositions sont examinées à partir d'extraits de cahier de recherche projetés, comme les exemples suivants.







17 Sylvie Grau, « Modélisation : le cas des fonctions affines », *Repères-IREM*, n° 108, juillet 2017.

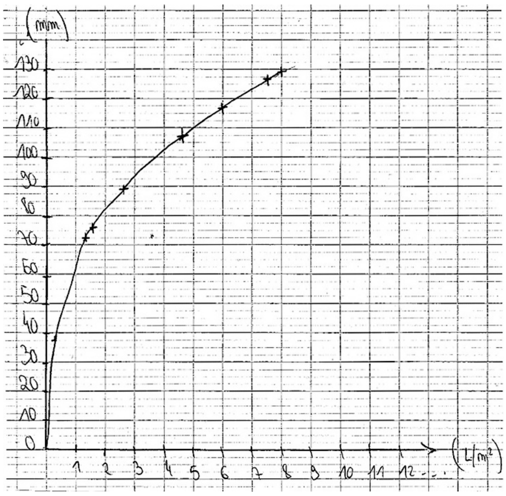
Les tentatives de conversion échouent. Ce n'est pas comme s'il y avait juste un changement d'unité.
Des procédures de proportionnalité sont invalidées (production en haut à gauche, page précédente) car P et H ne sont pas proportionnelles.
Des élèves proposent d'introduire une fonction (production en bas à gauche), mais l'étude des fonctions $t \mapsto H$ et $t \mapsto P$ n'apporte pas grand-chose (production de droite).
Il émerge finalement qu'il faut « éliminer le temps » pour pouvoir étudier les relations entre les H et P grandeurs.

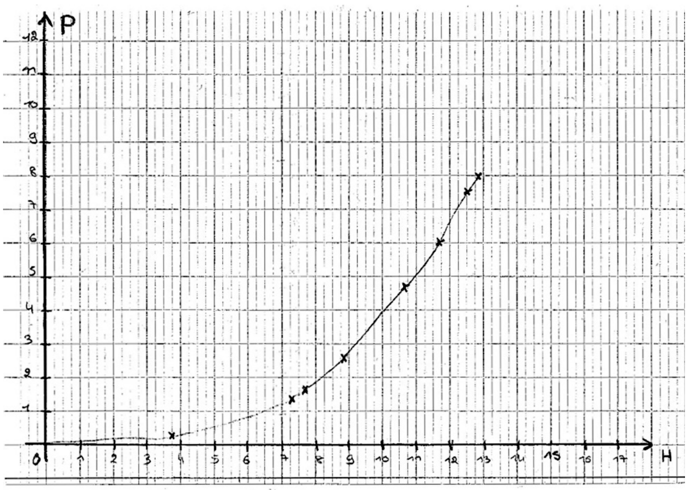
C'est le 21 mars qu'il devrait pleuvoir le plus. Donc la question est de savoir si une pluviométrie de 11 L/m² prévue par la météo correspond à plus de 142 mm dans le pluviomètre ou à moins de 142 mm.
On va étudier les relations entre la pluviométrie P et la hauteur d'eau dans le pluviomètre H, en « éliminant les dates ».
Attention : H et P ne sont pas proportionnelles !

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** où est mutualisée l'idée de tracer une courbe représentant les variations d'une grandeur en fonction de l'autre.

Travail personnel avec entraide, puis plénière. Nous prévenons les élèves que nous n'abordons pas encore le problème de l'inondation de la cave. Des courbes sont projetées, au moins une avec P en abscisse et une avec H en abscisse, en privilégiant celles qui s'arrêtent au point correspondant à 8 L/m² et 129 mm. Nous abordons les questions suivantes.
– À quoi correspond le point origine ?
– Peut-on relier les points ? Si oui, comment ? La fonction est croissante, donc par des « traits qui montent », mais pas par des segments car cela privilégierait les points correspondant aux relevés, ce qui n'a pas lieu d'être. Si le pluviomètre a une forme « bien régulière », on doit relier les points par des « courbes bien arrondies » en respectant la progressivité des changements de pente (poignet bien détendu !). Mais si le pluviomètre est par exemple conique dans sa partie basse puis cylindrique au-dessus, la courbe ne sera pas toujours arrondie (nous ne rentrons pas dans les détails).
– Peut-on prolonger les courbes au-delà du point correspondant à 8 L/m² et 129 mm ? Oui, par des « courbes bien arrondies » à condition que le pluviomètre ait une forme « bien régulière ».
– La courbe de $P \mapsto H$ peut-elle « devenir horizontale » ?
– La courbe de $H \mapsto P$ peut-elle « devenir verticale » ?

Nous sélectionnons deux courbes bien réalisées, si possible non « prolongées », l'une avec P en abscisse, l'autre avec H, nous les photocopions et les distribuons.





Travail individuel pour conclure à partir de ces deux courbes et de son propre travail, puis **plénière**. Les élèves débattent. Ils parlent de la précision des courbes, de la fiabilité des prévisions météo. Les résultats peuvent être différents d'un élève à l'autre suivant la précision du tracé et la manière dont les courbes ont été prolongées. On n'est donc certain de rien, ni que la cave sera inondée, ni qu'elle ne le sera pas : M. Legoff doit donc se méfier !

En guise de bilan, nous disons : « Ce sont des fonctions avec des grandeurs autres que le temps qui nous ont permis de donner une réponse argumentée », puis : « Si le pluviomètre était conique, on pourrait trouver des expressions de P en fonction de H et de H en fonction de P, c'est-à-dire $H = f(P) = 64{,}6\sqrt[3]{P}$ et $P = g(H) = \left(\dfrac{H}{64{,}6}\right)^3$, où $\sqrt[3]{P}$ est le nombre dont le cube vaut P. Ces formules se déduisent de celle du volume du cône. »

Les élèves collent les courbes après avoir ajouté les mentions « courbe de $f : P \longmapsto H$ » (respectivement $g : H \longmapsto P$), *les pointillés avec des flèches directionnelles pour l'image de 11 (respectivement l'antécédent de 11) et le nom des grandeurs (respectivement les unités L/m² et mm, et cm et L/m²). Chacun peut également coller sa propre courbe.*
Le bilan est fait à partir du bilan F1 n° 3 ci-dessous. Dans les trous, chaque élève indique ce qu'il a trouvé en prolongeant les courbes.
Comme P et H ne sont pas proportionnelles, les fonctions f et g ne sont pas linéaires.
Quand H ou P augmente, l'autre grandeur augmente aussi : donc les fonctions f et g sont croissantes.
Sans hypothèse supplémentaire sur la forme du pluviomètre, on ne peut pas répondre de manière satisfaisante.
Mais si le pluviomètre a approximativement la forme d'un cône comme sur la photo, alors les courbes sont « régulières » et on peut alors relier les points.
Sous cette hypothèse, d'après la courbe de gauche, l'image de 11 par f est ……………, donc la cave …………… inondée. Et d'après la courbe de droite, le seul antécédent de 11 par g est ……………, donc la cave …………… inondée.
De plus, les prévisions météo six jours à l'avance ne sont pas fiables et la méthode par prolongement de courbe n'est pas très précise. Donc M. Legoff devrait s'inquiéter.
Remarque : Les données de l'exercice correspondent à un pluviomètre conique tel que $H = f(P) = 64{,}6\sqrt[3]{P}$ et $P = g(H) = \left(\dfrac{H}{64{,}6}\right)^3$.

Source : pluviometres.com

EXERCICE DU TEST AUTO

Un journaliste travaillant pour un magazine automobile teste la consommation d'essence d'une voiture à différentes vitesses moyennes comprises entre 25 km/h et 130 km/h. La consommation C se mesure en litres consommés pour 100 kilomètres. Il obtient les résultats suivants.

V (km/h)	70	130	60	110	50	90	25
C (L/100 km)	5,9	10,5	5,5	8,1	5,2	6,3	6,3

Soit les fonctions $f : C \longmapsto V$ et $g : V \longmapsto C$.
1. Déterminez l'image de 90 par g et l'image de 6,3 par f.
2. Le tableau ci-dessous pourrait-il être un tableau de variations de la fonction g ? Si oui, est-ce le seul possible ?

V	25		60		130
Variations de $g(V)$ (c'est-à-dire C)	6,3	↘	5,5	↗	10,5

3. Le tableau ci-dessous pourrait-il être un tableau de variations de la fonction g ? Si oui, est-ce le seul possible ?

V	25	45	130
Variations de $g(V)$ (c'est-à-dire C)	6,3 ↘		↗ 10,5
		5,1	

4. On fait l'hypothèse qu'à partir de 43 km/h, plus la vitesse est grande, plus la consommation est grande.
Traduisez cette hypothèse en termes de variations de la fonction g. Que peut-on alors dire de $g(100)$?
5. On fait l'hypothèse que jusqu'à 43 km/h, plus la vitesse est grande, plus la consommation est petite.
Traduisez cette hypothèse en termes de variations de la fonction g. Que peut-on alors dire de $g(40)$?
6. Dressez un tableau de variations cohérent avec les valeurs de l'énoncé et avec les hypothèses des questions 3 et 4.
7. (Question pour les rapides) On fait l'hypothèse qu'entre 90 km/h et 110km/h, l'accroissement de la consommation est proportionnel à l'accroissement de la vitesse. Donnez une estimation de la consommation de carburant à 97 km/h.

Travail individuel entrecoupé assez vite par une **plénière de régulation**. Il émerge que la fonction f n'a aucun sens, sinon 6,3 aurait deux images ! Eh oui, il arrive que nos énoncés soient trompeurs ! Dans la vie courante, on ne dirait jamais que la vitesse dépend de la consommation, c'est l'inverse. Le fait que la consommation soit aussi importante à 90 km/h et à 25 km/h interroge les élèves. Nous l'expliquons par le fait qu'à petite vitesse, le rendement n'est pas très bon.

Deuxième plénière de régulation durant laquelle il émerge que le tableau de la question 2 est impossible car $g(50) < g(60)$.

Travail en équipes, puis plénière. Pour aider les élèves en difficulté, nous projetons à l'occasion Test_auto.ggb où les différentes valeurs de l'énoncé sont placées sur un graphique. L'expression de la croissance (respectivement décroissance) de g sur un intervalle à l'aide d'une condition telle que « si $u \leq v$, alors $g(u) \leq g(v)$ (respectivement) » est un objectif de fin d'année ; ici, nous semons seulement des petites graines.

À la fin, nous projetons le tableau suivant et posons une par une les questions : que peut-on dire de $f(7)$? De $f(-2)$? De $f(2)$? De $f(6)$?

x	0	3	7	10
Variations de $f(x)$		5		3
	-2 ↗	↘	0 ↗	

1. La fonction f n'a aucun sens, sinon 6,3 aurait deux images !
2. Ce tableau ne correspond pas à g car $g(50) < g(60)$.
3. Ce tableau pourrait être celui de g mais ce n'est pas le seul possible. On pourrait par exemple remplacer 5,1 par 5.
4. g est croissante sur l'intervalle [43 ; 130]. Dans ce cas, $g(100)$ est compris entre $g(90)$ et $g(110)$, c'est-à-dire $6,3 \leq g(100) \leq 8,1$.
5. g est décroissante sur l'intervalle [25 ; 43]. Dans ce cas, $g(40)$ est plus petit que $g(25)$, c'est-à-dire $g(40) \leq 6,3$.

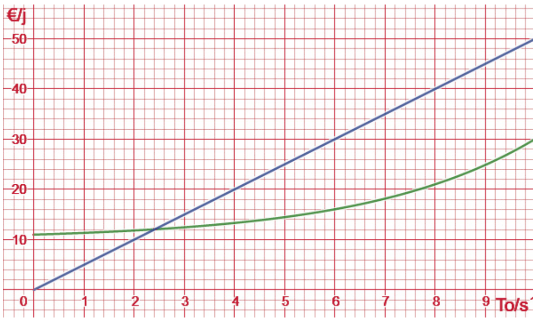
Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons les résumés Fonctions : généralités et Fonctions : extremum, sens de variation.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

À partir d'un tableau de variations ou d'informations sur le sens de variation de f, nous formulons des questions du type : « Que peut-on dire de $f(x_0)$? »

EXERCICE DES ISP

Wolfgang.net et Zinfinity sont deux fournisseurs d'accès internet pour les entreprises (Internet Service Provider), qui proposent différents tarifs suivant le débit souhaité par l'entreprise. Ces tarifs sont représentés ci-dessous.



Le débit est donné en téraoctet par seconde (To/s) et le prix en euro par jour (€/j).
Le débit maximal proposé est de 10 To/s.
Le tarif proposé par Zinfinity est proportionnel au débit fourni.
On note $W(d)$ et $Z(d)$ les tarifs de Wolfgang.net et Zinfinity pour un débit de d.
Complétez le tableau ci-dessous.

ÉQUATION OU INÉQUATION	SOLUTIONS	ENSEMBLE DES SOLUTIONS	INTERPRÉTATION EN TERMES DE TARIF
$W(d) = Z(d)$			
$W(d) \leq Z(d)$			
$W(d) \geq Z(d)$			

Travail à la maison au crayon à papier, puis en **équipes**, puis **plénière**.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

À partir des courbes de deux fonctions f et g tracées sur un même graphique, nous demandons aux élèves de déterminer les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ et des inéquations $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.

SÉQUENCE 15

Fonctions pratiques avec formules (F2)

Le titre de cette séquence est uniquement à destination du lecteur. Nous ne le communiquons pas aux élèves.
Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur le passage d'un mode de représentation d'une fonction (graphique, symbolique, tableau de valeurs) à un autre. Ils ont modélisé une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire. Les fonctions affines et linéaires sont présentées par leurs expressions algébriques et leurs représentations graphiques. Les fonctions sont utilisées pour modéliser des phénomènes continus et résoudre des problèmes.

PROGRAMME 2019

Fonctions

– Exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique.
– La modélisation d'une dépendance par une fonction apparaît dans des domaines très variés : géométrie dans le plan ou dans l'espace, biologie, économie, physique […].
– Fonctions affines, carré, inverse, cube. Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
– Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou […] la calculatrice […] pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
– Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) \leq k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.

Utiliser le calcul littéral

Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $d = vt$, $V = \pi r^2 h$ […]), exprimer une variable en fonction des autres.

Géométrie

Traiter de problèmes d'optimisation.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Comme pour la séquence F1, les exercices font intervenir des contextes « pratiques » et peuvent être modélisés à l'aide de fonctions pratiques. La nouveauté ici est que pour les fonctions f en question, une expression de $f(x)$ est accessible. Les élèves sont ainsi amenés à élaborer et à utiliser des formules.
– **Étape 1** : Nous commençons par des modèles affines. Les résultats de cycle 4 sur les courbes des fonctions affines et linéaires sont revus. Les coefficients directeurs des fonctions affines sont interprétés comme des taux d'accroissement. Nous apprenons aux élèves à utiliser leur calculatrice pour éditer des courbes et des tableaux de valeurs de fonctions.
– **Étape 2** : Les modèles font intervenir des fonctions polynômes de degré 2, homographiques et cubiques. Les fonctions théoriques de référence correspondantes seront étudiées dans la séquence F3.

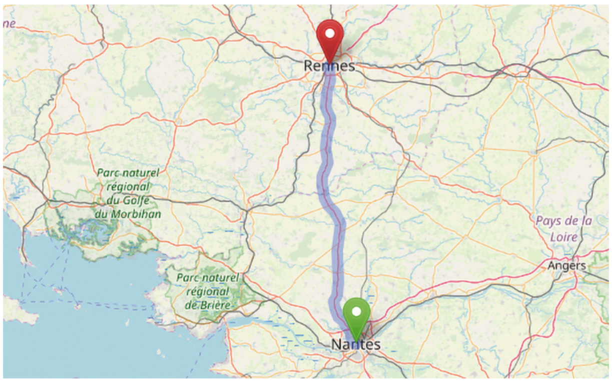
ÉTAPE 1

Modèles affines, courbes des fonctions affines et linéaires

Phase de prise en main de notions du cycle 4, phase d'élaboration de l'utilisation de la calculatrice pour étudier une fonction | ⏱ 3 heures

EXERCICE DU CROISEMENT

Au volant de sa voiture, **N**olwenn quitte **N**antes en direction de Rennes en empruntant la voie rapide. Au même moment, **R**ozenn quitte **R**ennes en direction de Nantes à l'autre bout de cette même voie rapide. La distance entre la porte de Rennes à Nantes et la porte de Nantes à Rennes est de 97 km.
Le trajet est dessiné ci-dessous.
Nolwenn roule à la vitesse constante de 90 km/h.
Rozenn roule à la vitesse constante de 120 km/h.
Quand et où les deux automobilistes vont-elles se croiser ?



@ Les contributeurs d'OpenStreetMap
Source : openstreetmap.org.

Cet exercice peut être résolu par tâtonnement, par mise en équation, en traçant des courbes d'évolution de distance ou encore géométriquement en remarquant que 3/4 de 120 = 90. La dernière méthode est élégante mais n'apporte pas grand-chose compte tenu de nos objectifs d'apprentissage ; elle ne sera étudiée qu'à la fin si des élèves y pensent. Un de nos objectifs est que tous les élèves procèdent à la résolution du problème à l'aide de courbes. Il s'agit du premier travail de l'année sur les courbes des fonctions affines et linéaires : les propriétés vues en cycle 4 sont réutilisées. Cet exercice est également l'occasion d'apprendre aux élèves à utiliser leur calculatrice pour éditer des courbes et des tableaux de valeurs de fonctions.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Les premières pistes sont partagées. Il émerge que lorsqu'on roule à vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours. Nous demandons alors quelle est la distance parcourue par chacune en 1 minute (**travail individuel très bref**). La formule $v = dt$ est exhibée. Enfin, les idées de méthodes de résolution sont mutualisées :
– calculer les distances parcourues à différents instants et tâtonner ;
– faire une représentation graphique de l'évolution de certaines distances ;
– mettre le problème en équation.

Travail individuel, puis en équipes pour écrire une production commune.

Plénière. Nous projetons d'abord les productions des équipes qui ont tâtonné, par exemple celle ci-après.

t	R	N	Somme R+N
24 min 25	48,5	36,375	84,875
25	50	37,5	87,5
27	54	40,5	94,5
28	56	42	98
27,5	55	41,25	96,25
27,75	55,5	41,625	97,125
X 27,7	55,4	41,55	96,95

Le problème est résolu mais nous expliquons aux élèves que les méthodes de résolution graphique et algébrique sont importantes et qu'il faut les connaître.

Nous passons à l'étude des représentations d'une ou deux distances parcourues en fonction du temps, étude qui n'aide pas beaucoup à résoudre le problème. Nous discutons d'abord de la pertinence du choix des échelles. Puis les élèves constatent que lorsqu'on place un par un les points correspondant aux distances parcourues par Nolwenn ou Rozenn, ceux-ci sont alignés. Comment l'expliquer ? (**Travail individuel très bref**.) Il y a plusieurs réponses possibles :
– comme la vitesse est constante, pendant une même durée, la distance varie de la même quantité ;
– la distance parcourue est proportionnelle au temps : les fonctions sous-jacentes sont linéaires et la courbe d'une fonction linéaire est une partie d'une droite passant par l'origine.
En conclusion de cette parenthèse, on en arrive à l'idée qu'il ne sert à rien de placer de nombreux points : un seul suffit, si possible éloigné de l'origine pour plus de précision.

Ensuite, il émerge qu'il ne sert pas à grand-chose de représenter les deux distances parcourues mais qu'il serait intéressant de représenter sur un même graphique l'évolution des distances entre Nolwenn et Nantes ainsi qu'entre Rozenn et Nantes. Une fois cette dernière idée donnée (par une équipe ou à défaut par nous), nous distribuons une grille adaptée, disponible dans le fichier Grilles.

Travail individuel pour représenter l'évolution de N et R, distance entre Nolwenn (respectivement Rozenn) et Nantes, et en déduire la réponse au problème. Ceux qui ont terminé cherchent une méthode algébrique, sans graphique ni tâtonnement.

Plénière. Il y a deux manières de justifier l'alignement des points de la courbe de R. La première est de dire que la vitesse étant constante, la distance varie de la même quantité pendant une même durée. La seconde est de dire que comme $R(t) = 97 - 2t$ pour tout t, la fonction R est affine, donc sa courbe est une partie d'une droite. Finalement, on voit sur le graphique que le croisement a lieu pour $t = 28$ min, à 41 ou 42 km de Nantes.

Chacun colle sa courbe sur laquelle figurent les pointillés du point d'intersection jusqu'aux axes et ajoute les légendes :
« N : distance entre Nolwenn et Nantes » et « R : distance entre Rozenn et Nantes ».
À $t = 28$ min (environ), Nolwenn et Rozenn se croisent car elles sont à la même distance de Nantes (environ 41 km).

Plénière. Nous projetons enfin les raisonnements algébriques, par exemple celui-ci.

1) x = nombre de minutes qui s'écoulent

$\boxed{t = d : v}$

$$2x + 1,5x = 97$$
$$3,5x = 97$$
$$x = \frac{97}{3,5}$$
$$x \approx 27,71 \text{ minutes de trajet}$$
$$\approx 28 \text{ min}$$

Elles vont se croiser à ~~28~~ environ 28 ~~km~~ min de trajet.

Nous faisons constater que la méthode algébrique est plus précise et plus rapide. Le croisement a lieu pour t = 27,71 min = 27 min 43 s, à 41,57 km de Nantes.

Si, lors de l'étude des courbes de N et R, les formules $N(t) = 1{,}5t$ et $R(t) = 97 - 2t$ ne sont pas apparues, nous demandons d'exprimer $N(t)$ et $R(t)$ en fonction de t (**travail individuel très bref**). Le lien entre le point d'intersection des courbes de N et R et la solution de l'équation $1{,}5t = 97 - 2t$ est fait.

Une résolution algébrique, éventuellement annotée, est collée.

Bilan sur les fonctions N et R

Nous disons que cet exercice est l'occasion d'étudier des fonctions linéaires et affines.

Travail individuel très bref pour écrire les propriétés de leurs courbes, puis **plénière**. En toute rigueur, ce ne sont pas des droites mais des parties de droites.

Nous écrivons au tableau l'exercice suivant : « Soit t et t' tels que $t < t'$. Simplifiez $\frac{N(t')-N(t)}{t'-t}$ et $\frac{R(t')-R(t)}{t'-t}$ ».

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. L'idée de factoriser $N(t') - N(t)$ émerge. Nous rappelons que factoriser une somme ou une différence, c'est la transformer en un produit ou une puissance.

Plénière. Une fois l'exercice résolu, nous disons : « Ces quotients s'appellent des *taux d'accroissement* : accroissement car le numérateur est un accroissement de distance, taux parce qu'on divise par la variable indépendante, ici le temps. Ici, ces taux sont des vitesses : 1,5 km/min et – 2 km/min. Ce qui est remarquable, c'est que ces taux d'accroissement ne dépendent pas de t et de t'. C'est dû au fait que les vitesses sont constantes. Les taux d'accroissement des fonctions affines sont toujours constants. » Nous montrons le dessin qui figure dans le bilan suivant et faisons le lien avec le théorème de Thalès. Nous faisons également le lien entre le sens de variation de N et le signe de 1,5 (respectivement R et – 2).

Le bilan est fait à partir du bilan F2 n° 1 ci-dessous qui comporte une erreur à corriger par les élèves (supprimer « qui ne passe pas par l'origine » dans la deuxième propriété).

Étude des fonctions N : $t \mapsto 1{,}5t$ et R : $t \mapsto 97 - 2t$

La fonction N est linéaire (multiplication par 1,5) et croissante.
La fonction R est affine (multiplication par – 2 puis addition de 97) et décroissante mais elle n'est pas linéaire car $R(0) \neq 0$.

Propriétés

La courbe d'une fonction linéaire est une partie d'une droite passant par l'origine.
La courbe d'une fonction affine est une partie d'une droite qui ne passe pas par l'origine.

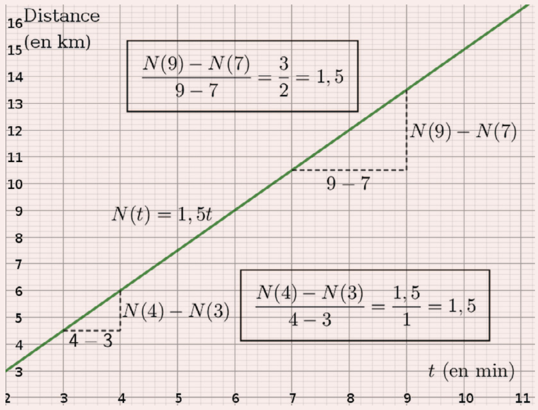
Taux d'accroissement des fonctions R et N

Pour tous t et t' tels que $t < t'$, on a :

$$\frac{N(t')-N(t)}{t'-t}=\frac{1{,}5t'-1{,}5t}{t'-t}=\frac{1{,}5(t'-t)}{t'-t}=1{,}5$$

$$\frac{R(t')-R(t)}{t'-t}=\frac{97-2t'-(97-2t)}{t'-t}=\frac{-2t'+2t}{t'-t}=\frac{-2(t'-t)}{t'-t}=-2$$

Ces taux d'accroissement ne dépendent pas de t et de t'
car les vitesses de Nolwenn et Rozenn sont constantes.
Ces taux correspondent aux vitesses 1,5 km/min et – 2 km/min.



Courbes et tableaux de valeurs des fonctions $N : t \mapsto 1{,}5t$ et $R : t \mapsto 97 - 2t$ avec la calculatrice

Nous distribuons le résumé Étude de fonctions à la calculatrice, chaque élève recevant celui correspondant à sa calculatrice (Casio, Numworks ou TI).

Nous modifions temporairement les équipes pour qu'au sein d'une même équipe, tous aient une calculatrice du même type. Nous expliquons qu'une fois les expressions des fonctions N et R saisies, on peut tracer leurs courbes sur une même fenêtre. Ici, on va choisir $x_{min} = 0$, $x_{max} = 70$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = 100$. Puis on peut utiliser le mode *Trace* et les flèches pour obtenir les coordonnées du point d'intersection. On peut également éditer des tableaux de valeurs des deux fonctions en choisissant notamment le *pas*. Nous montrons comment faire sous la caméra avec la calculatrice la plus répandue dans la classe.

Travail personnel avec entraide pour faire ce qui vient d'être expliqué en s'aidant du résumé.

EXERCICE DU TÉLÉCHARGEMENT

1. Un service de téléchargement propose à ses clients un tarif A, proportionnel au poids des données téléchargées :
– pour un poids de 40 Mo (mégaoctets), on paye 1,80 € ;
– pour un poids de 66 Mo, on paye 2,97 €.
Complétez, sans calculatrice, le tableau de proportionnalité ci-dessous.

Poids des données (Mo)	40	66	80	146	106	73	1
Tarif A (€)							

2. Pour le mois de janvier, le site propose aux clients deux autres tarifs.
– Tarif B : somme fixe de 4,50 € en début de mois, puis 0,02 € par mégaoctet.
– Tarif C : 18 € pour un téléchargement illimité pendant tout le mois.
Déterminez, suivant le poids des données téléchargées, le tarif le plus avantageux.

Travail individuel pour la question 1, puis plénière. Nous demandons : « Êtes-vous sûr que lorsque le temps double, la somme double aussi ? Peut-il y avoir des réductions ? ». En fin de plénière, nous demandons de lire la suite de l'énoncé, puis de donner les tarifs A, B et C pour 300 Mo téléchargés (**travail individuel très bref**).

Travail individuel pour la question 2. Nous donnons aux élèves qui commencent à tracer des courbes sur papier une grille adaptée pour qu'ils gagnent du temps, disponible dans le fichier Grilles.

Travail en équipes, puis plénière. Plusieurs méthodes émergent : tracé de courbes à la main ou à la calculatrice, tabulation à la calculatrice, résolution d'équations. Des courbes tracées sur la grille ou sur l'écran de la calculatrice sont projetées. Les propriétés des fonctions affines, linéaires et constantes sont rappelées. Des élèves disent que résoudre les équations $a(p) = b(p)$ et $b(p) = c(p)$ permettraient d'avoir des réponses précises (nous avons convenu d'appeler les fonctions a, b et c, et d'utiliser la lettre p, comme poids, pour désigner la variable des trois fonctions) mais ces équations ne sont pas encore résolues en plénière.

Travail personnel avec entraide. Chacun utilise les méthodes qu'il n'a pas encore utilisées. À l'issue de ce travail, chacun a tracé les trois courbes sur la grille (ceux qui ne l'avaient pas encore reçue la récupèrent sur notre bureau), tracé les trois courbes sur la calculatrice, tabulé avec la calculatrice et résolu les équations $a(p) = b(p)$ et $b(p) = c(p)$. Chacun colle sa grille avec les trois courbes.

Nous notons au tableau l'exercice suivant : « Soit p et p' tels que $p < p'$. Simplifiez $\frac{c(p')-c(p)}{p'-p}$ ».

Travail individuel très bref, puis plénière. Ces taux d'accroissement sont nuls car la fonction c est constante.

Le bilan de la question 2 est fait à l'aide du bilan F2 n° 2 contenant, d'une part, une solution incluant des résolutions des équations $a(p) = b(p)$ et $b(p) = c(p)$ et, d'autre part, quelques propriétés de la fonction constante c.

Devoir à la maison : exercice du déménagement (disponible dans le fichier Autres exercices de prise en main et d'approfondissement).

ÉTAPE 2

Modèles non affines

Phase de prise en main de la méthode de modélisation | 2 heures

EXERCICE DU JARDIN POTAGER

M. Legoff souhaite utiliser les 35 mètres de grillage dont il dispose pour délimiter un jardin potager rectangulaire. Pour que la surface du potager soit la plus grande possible, il utilise son mur pour délimiter un des côtés du rectangle. Ainsi, le grillage servira uniquement pour les trois autres côtés.

1. Comment peut-il s'y prendre ?
2. (Question pour les rapides) Même question en remplaçant 35 m par une longueur quelconque.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation** pour donner quelques exemples, montrer la variabilité à l'aide de Potager.ggb (sans afficher l'aire), puis partager l'idée de commencer par trouver une expression de l'aire en fonction d'un des côtés du rectangle. Éventuellement, **deuxième plénière de régulation** où nous choisissons des noms pour les deux côtés du rectangle, par exemple c et d comme dans le bilan, et où la relation $2c + d = 35$ est exhibée.

Travail en équipes, puis plénière. Nous étudions d'abord les méthodes liées à la fonction $f : c \longmapsto c(35 - 2c)$. Les élèves qui ont tabulé ou tracé la courbe à la calculatrice s'expriment. La question des valeurs minimale et maximale de c est discutée. Nous faisons ensuite de même avec la fonction $g : d \longmapsto \frac{d(35-d)}{2}$.

Nous illustrons les débats à l'aide de Potager.ggb, en affichant l'aire cette fois-ci. Les valeurs où les maxima sont atteints (en 8,75 pour f et en 17,5 pour g) sont mises en lien avec les zéros de f et g et les symétries des courbes.

Nous disons que ces deux courbes sont des paraboles et expliquons pourquoi certaines antennes sont *paraboliques* : « Après réflexion sur le paraboloïde de révolution, les ondes se concentrent au foyer. »

Le bilan est fait à l'aide du bilan F2 n° 3 contenant une résolution basée sur l'étude de f, puis une autre basée sur l'étude de g. Chacune est accompagnée d'un tableau de valeurs et d'une courbe (captures d'écran de calculatrice). Nous distribuons un seul document contenant ce bilan ainsi que l'exercice du jardin potager (suite).

EXERCICE DU JARDIN POTAGER (SUITE)

1. Malheureusement, M. Legoff n'a pas maximisé la surface de son potager puisqu'elle est seulement de 117 m².
Quelle peut être la longueur du côté perpendiculaire au mur de son potager ?
2. La voisine de M. Legoff lui explique que s'il avait mieux choisi les dimensions, il aurait pu avoir un potager d'au moins 140 m².
Quelles longueurs du côté perpendiculaire au mur lui auraient permis d'obtenir une aire supérieure ou égale à 140 m² ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Des élèves expliquent ce qu'ils ont fait en mettant leur calculatrice sous la caméra.

(Sans rédiger) **1.** $c = 4,5$ ou $c = 13$.
2. Toutes les valeurs de c comprises entre 6,2 et 11,3 environ.

EXERCICE DE LA PIERRE

Un enfant lance une pierre en l'air depuis un arbre situé à une hauteur de 4 mètres par rapport au sol. Tant qu'elle n'a pas touché le sol, la hauteur de la pierre (en mètres) est $h(t) = 4 + 2t - 0,7t^2$ où t est le temps écoulé (en secondes) depuis le lancer. Par exemple, 3 secondes après le lancer, la hauteur de la pierre est 3,7 m car $h(3) = 4 + 2 \times 3 - 0,7 \times 3^2 = 3,7$
1. À quelle hauteur maximale la pierre s'élève-t-elle ?
2. Combien de secondes après le lancer la pierre touche-t-elle le sol ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. L'allure de la courbe est reliée à la forme de $h(t)$.

(Sans rédiger) **1.** 5,40 m **2.** 4,2 s

EXERCICE DE LA CONCENTRATION EN SUCRE

Le médecin de Monsieur X lui recommande de ne pas consommer plus d'une certaine quantité de sucre par jour. La masse quotidienne autorisée (MQA) d'un aliment – si Monsieur X ne prend pas de sucre par ailleurs – dépend de la concentration en sucre de cet aliment. Voici quelques MQA regroupées dans un graphique.

Pour Monsieur X, quelle est la MQA des aliments suivants :
– les corn flakes sucrés dont la concentration en sucre est de 0,85 ;
– l'ananas dont la concentration en sucre est de 0,12 ;
– le fromage de chèvre dont la concentration en sucre est de 0,015.

Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Nous demandons ce que signifient les coordonnées du point correspondant à la tomate. La concentration est interprétée comme le pourcentage de sucre présent. Éventuellement, **deuxième plénière de régulation** pour mutualiser les pistes : relier les points, chercher la masse de sucre autorisée chaque jour, etc.

Travail en équipes, puis plénière. Nous projetons la courbe d'un élève qui a relié les points par des segments : d'autres élèves sont en désaccord et pensent qu'il faut « des arrondis ». Nous projetons alors une courbe avec de beaux arrondis ; son auteur en déduit la MQA d'ananas, environ 210 g. Nous disons : « Cela semble raisonnable mais ne pourrait-on pas avoir une courbe comme ça ? » (nous dessinons la courbe d'une fonction qui n'est pas décroissante sur [0,04 ; 0,25]). Il émerge que plus la concentration C est grande, plus la MQA est petite, autrement dit que la fonction f : C $\longmapsto$ MQA est décroissante. Nous demandons ce qu'on peut en déduire pour $f(0{,}4)$ (**travail individuel très bref**).

Cette méthode fonctionne bien pour les corn flakes car les concentrations des dattes et de la meringue sont très proches, mais pas pour le fromage de chèvre car nous n'avons pas de donnée sur des concentrations inférieures à 0,015.

Nous passons ensuite aux méthodes calculatoires. Une élève dit que la concentration de l'ananas est trois fois plus grande que celle de la tomate, donc qu'on peut en manger trois fois moins. Ce raisonnement est validé et le résultat est comparé au précédent.

Ensuite, un élève dit que pour tous les points du graphique le produit de C × MQA est égal à 25, ce qui permet de trouver les MQA demandées : par exemple pour l'ananas 25 ÷ 0,12 = 208. Nous demandons s'il est certain que la relation C × MQA = 25 reste vraie pour l'ananas. Un élève expose que C × MQA est la quantité de sucre contenue dans la masse MQA de l'aliment (car calculer p % d'une quantité revient à la multiplier par p %) et donc que cela correspond à la dose journalière autorisée en sucre. D'ailleurs, l'OMS a récemment recommandé qu'un adulte doté d'un IMC normal ne consomme pas plus de 25 g de sucre par jour.

Nous validons et demandons d'appliquer la méthode pour les corn flakes et le fromage de chèvre (**travail individuel très bref**). La MQA des corn flakes est confirmée. Un élève constate que le point correspondant au fromage de chèvre ne peut pas être placé sur le graphique.

Nous demandons ensuite de déterminer une expression de MQA en fonction de C (**travail individuel très bref**). On en déduit $f(x) = \frac{25}{x}$ pour tout x. **Travail individuel très bref** pour tracer la courbe de f sur la calculatrice. La question des valeurs possibles de x se pose : on se limite aux x tels que $0 < x \leqslant 1$ car une concentration est comprise entre 0 et 1 et car on ne peut pas diviser par 0.

Nous traçons la courbe sur le fichier Sucre.ggb et disons qu'il s'agit d'un arc d'hyperbole. Le point correspondant au fromage de chèvre ne peut pas être placé sur le graphique. Nous écrivons $\lim\limits_{x \to 0, x>0} \frac{25}{x} = +\infty$.

Le bilan est fait à l'aide du bilan F2 n° 4 contenant des commentaires sur la méthode graphique, les calculs de la méthode calculatoire et quelques explications sur la fonction C $\longmapsto$ MQA. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan suivi de l'exercice des boîtes cubiques.

EXERCICE DES BOÎTES CUBIQUES

Un fabricant de sable pour aquarium veut fabriquer des boîtes cubiques (c'est-à-dire en forme de cube) de différents volumes : 1 litre, 2 litres, 8 litres, 10 litres, etc. Pour cela, il doit bien choisir les longueurs des arêtes des boîtes. On rappelle que 1 litre correspond à 1 000 cm^3.
1. Démontrez que pour fabriquer une boîte de volume 1 litre, le fabriquant doit choisir des arêtes de 10 cm.
2. Démontrez que pour fabriquer une boîte de volume 8 litres, le fabriquant doit choisir des arêtes de 20 cm.
3. On considère la fonction f qui à la longueur des arêtes en cm associe le volume en cm^3. Exprimez $f(x)$ en fonction de x pour tout x.
4. Tracez sur la copie la courbe de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 25].
5. En utilisant le graphique précédent, expliquez comment le fabricant peut obtenir la boîte de volume 2 litres et la boîte de volume 10 litres (laissez les traits de construction sur le graphique).
6. À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, précisez les valeurs que vous avez obtenues graphiquement à la question 5.

Cet exercice prépare l'étude de la fonction cube (voir p. 248).

Devoir à la maison. Nous donnons en même temps un exercice d'optimisation avec une fonction polynôme de degré 2, par exemple l'exercice de la pénalité ou l'exercice des deux carrés (disponible dans le fichier Autres exercices de prise en main et d'approfondissement).

SÉQUENCE 16

Fonctions théoriques, fonctions de références (F3)

Au cycle 4, les fonctions affines et linéaires ont été présentées par leur expression algébrique et leur représentation graphique.

PROGRAMME 2019

Se constituer un répertoire de fonctions de référence, […] un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

Fonctions

– Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
– Relier sens de variation, signe [du coefficient directeur] et droite représentative d'une fonction affine.
– Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.
– Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.
– Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
– Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.
– Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
– Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques.
– Démonstration : variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.
– Démonstration : étudier la position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.
– Approfondissement possible : relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.
– Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Nombres et calculs

– Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
– Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
– Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.

PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

Nous avons déjà étudié des fonctions pratiques dans F1 et F2, ainsi que quelques fonctions théoriques associées à des programmes de calcul, mais nous n'avons encore jamais parlé aux élèves de fonctions pratiques ou théoriques.

Cette séquence doit être faite après G4 car la notion d'équation de droite intervient dans l'exercice de la plus petite longueur et aide à mieux comprendre la notion d'équation de la courbe représentative d'une fonction théorique.
Les seuls intervalles rencontrés jusque-là sont les intervalles fermés bornés. Cette séquence introduit les autres intervalles.
Nous étendons le travail avec les inégalités qui n'ont été utilisées jusqu'ici que dans les séquences G1 et G2 (surtout l'inégalité triangulaire et les comparaisons d'abscisses et d'ordonnées), ainsi que F1 et F2 (pour définir les intervalles $[a\,;\,b]$ et pour comparer des images, voir par exemple la démonstration concernant la racine carrée d'une somme p. 120, les exemples de distances entre deux points d'un plan p. 127, les résolutions graphiques d'inéquations p. 220 et l'exercice du téléchargement (p. 232).

- **Étape 1** : Introduction des fonctions théoriques en lien avec un problème de géométrie abstraite. Détermination d'extremum de fonctions polynômes du second degré. Opérations sur les inégalités.
- **Étape 2** : Fonctions affines théoriques. Sens de variation, signes. Caractérisation de la croissance ou de la décroissance d'une fonction.
- **Étapes 3 à 7** : Fonctions carré, cube, inverse, racine carrée et comparaison de certaines d'entre elles. Pour les inéquations, il s'agit seulement d'une première approche à travers un jeu : elles seront étudiées en détail dans la séquence Inéquations, non traitée dans cet ouvrage. Fonctions paires, impaires. Intervalles de $\mathbb{R}$ autres que ceux du type $[a\,;\,b]$. Calculs approchés de longueur d'une portion de parabole.

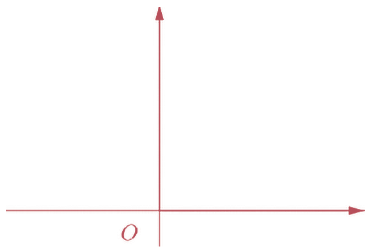
ÉTAPE 1

Deux types de fonctions, caractérisation d'un extremum d'une fonction

Phase d'élaboration des notions de fonction pratique et de fonction théorique, des opérations sur les inégalités et de la détermination d'un extremum d'une fonction théorique | 1h30

EXERCICE DE LA PLUS PETITE LONGUEUR

Dans un plan muni d'un repère d'origine O, on considère les points $A(0\,;\,3)$ et $B(2\,;\,0)$.
Parmi toutes les longueurs OM où M est un point de la droite (AB), quelle est la plus petite ? Commencez par faire une figure ci-contre avec pour unité 1 cm.



Travail individuel entrecoupé par une **plénière de régulation**. Sur Longueur_la_plus_petite.ggb, nous faisons varier la position du point M. Il émerge que la longueur cherchée est la distance de O à la droite (AB), c'est-à-dire OP où P est le projeté orthogonal de O sur (AB). À l'aide d'une mesure, on trouve que $OP \simeq 1{,}7$ mais ce n'est qu'une valeur approchée.

D'après la figure, la longueur cherchée vaut environ 1,7. On cherche maintenant une valeur exacte.

Deuxième plénière de régulation. Un élève propose d'utiliser le théorème de Pythagore mais cela ne marche pas directement. Si un élève a l'idée de raisonner sur l'aire du triangle OAB – ce qui est peu probable –, nous lui demandons de garder cette idée pour plus tard car nous souhaitons emmener les élèves vers l'étude d'une fonction théorique. Finalement, la question revient à trouver le minimum de la fonction $f : x \longmapsto OM$ où M est le point de (AB) d'abscisse x. Un élève propose d'utiliser la formule de la distance entre deux points. Nous validons cette idée. Ceux qui l'ont oubliée sont invités à prendre leur cahier de résumés.

On cherche le minimum de la fonction $f : x \longmapsto OM$ où M est le point d'abscisse x de (AB).

Travail individuel pour trouver une expression de $f(x)$ et le minimum de f, puis **en équipes**, puis **plénière**. L'expression $f(x)=\sqrt{x^2+(3-1{,}5x)^2}$ est obtenue. Des élèves éditent un tableau à la calculatrice ou tracent la courbe sur leur calculatrice et répondent que le minimum est 1,6641.

Nous alertons alors la classe : « Attention ! Cette méthode fonctionnait dans l'exercice du potager, mais elle ne fonctionne plus ici. Sauriez-vous dire pourquoi ? ». Il émerge que puisque nous faisons de la géométrie abstraite, nous voulons une valeur exacte et nous ne pouvons pas nous contenter de lire le minimum sur la courbe ou sur un tableau.
Nous disons alors, en théâtralisant : « Pourtant, dans l'exercice du potager, on avait obtenu le maximum de la fonction $x \longmapsto x(35-2x)$ par lecture graphique ou à l'aide d'un tableau de valeurs. Il y a donc une différence fondamentale entre cette fonction et la fonction f d'aujourd'hui. Écoutez bien, c'est important. La fonction f est une *fonction théorique* alors que la plupart des fonctions rencontrées depuis le début de l'année étaient des *fonctions pratiques*. Ces fonctions pratiques étaient associées à un problème pratique, comme dans l'exercice du potager, ou bien étaient définies par une courbe comme dans l'exercice des températures. Les images et les antécédents par une fonction pratique ne sont pas infiniment précis. Par exemple, si h est une fonction pratique et que $h(1{,}43) = 0{,}58$, les valeurs 1,43 et 0,58 ne sont pas infiniment précises, elles pourraient peut-être être remplacées par 1,42 et 0,59 ; ces valeurs peuvent dépendre de la précision d'une mesure ou bien de la précision d'une lecture graphique. Pour répondre à une question concernant une fonction pratique, on peut se contenter d'une lecture graphique ou d'un tableau de valeurs.
En revanche, la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+(3-1{,}5x)^2}$ d'aujourd'hui n'est pas une fonction pratique. C'est une fonction théorique car elle provient d'un problème théorique (ici un problème de géométrie abstraite). Elle s'applique à des nombres “infiniment précis” et donne aussi des nombres “infiniment précis”. Par exemple, $f(0) = 3$ mais $f(0) \neq 3{,}000001$. Pour cette raison, ni la courbe ni le tableau affichés par la calculatrice ne suffisent à trouver le minimum de f.
Nous avons rencontré d'autres fonctions théoriques cette année : toutes les fonctions associées à des programmes de calcul.
Pour répondre à une question concernant une fonction théorique, la courbe représentative ne suffit pas. Il faut utiliser des théorèmes, faire des calculs, faire des démonstrations, etc. »

Le bilan est fait à partir du bilan F3 n° 1 ci-dessous. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan suivi de l'exercice de la plus petite longueur (suite).
Les élèves écrivent le titre de la séquence.

On a démontré que la droite (AB) a pour équation $y = 3 - 1{,}5x$.
Donc pour tout nombre x, le point M d'abscisse x de la droite (AB) a pour ordonnée $3 - 1{,}5x$.
Donc la distance entre O et M est $f(x)=\sqrt{x^2+(3-1{,}5x)^2}$.
Attention ! Pour trouver le minimum de f, on ne peut pas se contenter d'une courbe ou d'un tableau de valeurs car il s'agit d'un exercice de géométrie abstraite. La fonction f est une fonction théorique : nous devons faire une démonstration dans le cadre des mathématiques théoriques.

EXERCICE DE LA PLUS PETITE LONGUEUR (SUITE)

Plus un nombre est grand, plus sa racine carrée est grande. Et plus un nombre est petit, plus sa racine carrée est petite. Donc il suffit de trouver le minimum de la fonction g définie par $g(x) = x^2 + (3 - 1{,}5x)^2$ pour tout x.

1. Démontrez que $g(x) = 3{,}25x^2 - 9x + 9$ pour tout x.
2. Démontrez que $g(x)=\dfrac{(6{,}5x-9)^2+36}{13}$ pour tout x.
3. Démontrez que le minimum de g est $\dfrac{36}{13}$.
4. Quelle est la plus petite longueur parmi toutes les longueurs OM où M est un point de la droite (AB) ?

Travail à la maison pour les questions 1 et 2, puis **en équipes**, puis **plénière**.

Travail individuel pour les questions 3 et 4, puis **en équipes**. Ceux qui ont terminé cherchent une démonstration géométrique, sans variable ni fonction.

Plénière. Question 3. Certains élèves ont une bonne intuition mais ont du mal à s'exprimer clairement. Ils disent que $\frac{36}{13}$ est la plus petite valeur de $g(x)$ car le carré est positif. Nous disons que ce raisonnement est trop rapide pour deux raisons : d'abord l'inégalité $g(x) \geq \frac{36}{13}$ doit être démontrée rigoureusement, mais surtout, elle ne suffit pas à démontrer que $\frac{36}{13}$ est le minimum. En effet, on a aussi $g(x) \geq \frac{35}{13}$ et pourtant, $\frac{35}{13}$ n'est pas le minimum. Il faut donc aussi montrer que $g(x)$ peut être égal à $\frac{36}{13}$ (**travail individuel très bref**). Nous expliquons ensuite comment établir rigoureusement $g(x) \geq \frac{36}{13}$. On y arrive en partant de $(6{,}5x - 9)^2 \geq 0$ et en effectuant des opérations sur les inégalités, opérations que nous présentons. Il s'agit de la première rencontre avec ce genre de raisonnement cette année. Enfin, si des élèves ont trouvé une démonstration géométrique, ils prennent la parole.

Puis nous passons aux premières utilisations de la méthode de détermination d'extremum d'une fonction théorique à l'aide d'inégalités : minimum de la fonction théorique $x \longmapsto 4 + x^2$? Maximum de $x \longmapsto 5 - x^2$? Minimum de $x \longmapsto 3 + 4(x + 1)^2$? À chaque fois, nous disons : « On a montré que $f(x)$ est toujours supérieur ou égal (respectivement inférieur) à … . Reste à savoir si $f(x)$ peut être égal à … ». Si des élèves ont du mal à trouver l'ordre des inégalités pour la dernière question, nous demandons d'écrire le code Club de l'expression (**travail individuel très bref**). La réponse (Somme 3 (Produit 4 (Carré (Somme × 1)))) peut les aider.

Le bilan de l'exercice porte également sur la nouveauté que constituent les fonctions théoriques. Nous précisons que dorénavant, quand on donnera juste une expression de $f(x)$, cela sous-entendra que la fonction f est théorique. Autrement dit nous étudierons maintenant des fonctions théoriques, sauf dans les exercices où les fonctions proviennent d'un problème pratique.

Le bilan est fait à l'aide du bilan F3 n° 2 contenant les propriétés sur la compatibilité des opérations avec les inégalités et une application à la détermination du minimum de la fonction $x \longmapsto 3 + 4(x + 1)^2$.
Les parties I et II du résumé Fonctions : autres généralités sont collées.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous donnons des extrema à trouver pour des fonctions similaires, pour des fonctions du genre $x \longmapsto x^2 + 4x + 4$.

ÉTAPE 2

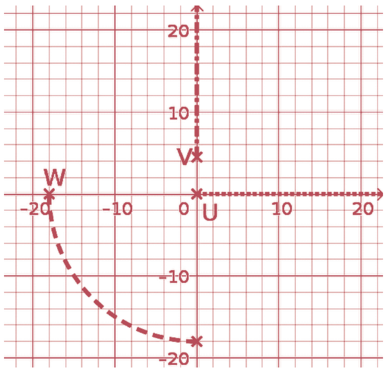
Fonctions affines théoriques, caractérisation de la monotonie d'une fonction

Phase d'élaboration | 2 heures

EXERCICE DES TROIS ROBOTS

Trois robots miniatures U, V et W se déplacent sur une surface plane munie d'un repère orthonormé d'origine O (unité de longueur : 1 mètre).
Au départ, le robot U se trouve en O, le robot V sur le point de coordonnées (0 ; 4,5) et le robot W sur le point de coordonnées (–18 ; 0).
À $t = 0$, les trois robots se mettent en marche :
- U se déplace vers la droite, sur l'axe des abscisses, à la vitesse constante de 0,045 m/s ;
- V se déplace vers le haut, sur l'axe des ordonnées, à la vitesse constante de 0,02 m/s ;
- W fait des allers-retours sur le quart de cercle de centre O et de rayon 18 compris entre les points de coordonnées (–18 ; 0) et (0 ; –18), à la vitesse constante de 0,03 m/s.

Déterminez, suivant les valeurs de t, quel robot est le plus proche de O.



Nous présentons d'abord la situation oralement à l'aide de Robots.ggb.

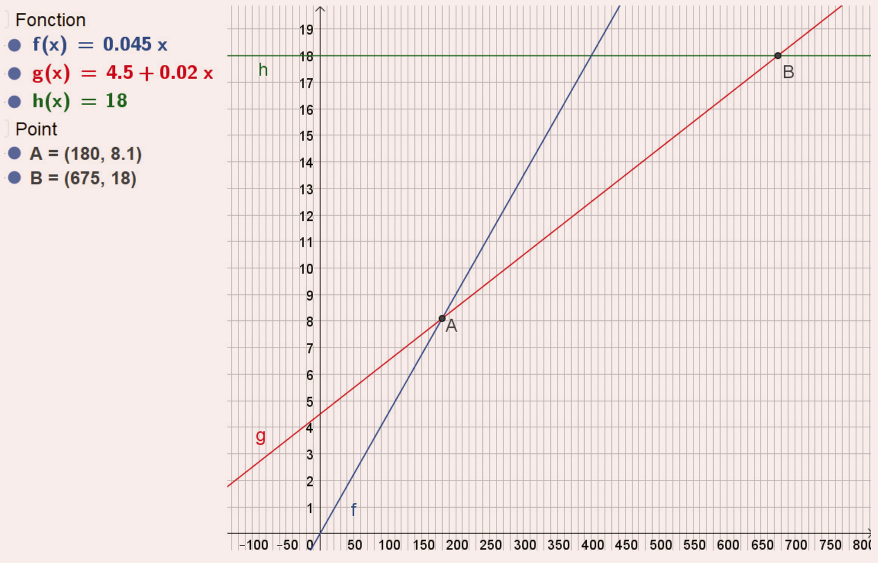
Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Les distances sont : $u(t) = 0{,}045\ t$; $v(t) = 4{,}5 + 0{,}02\ t$; $w(t) = 18$. Le lien est fait avec l'exercice du téléchargement (p. 232) dont les résultats sont rappelés (une courbe figurant sur un cahier de bord est projetée). Des élèves disent qu'on n'a pas besoin de refaire les calculs car ce sont « les mêmes formules ». Nous expliquons : « Dans l'exercice du téléchargement, les tarifs étaient des fonctions de p, le poids des données. Ici, les distances sont des fonctions du temps. Les fonctions ne sont pas du tout les mêmes : $p \longmapsto T$ dans un cas, $t \longmapsto d$ dans l'autre ! Mais vous avez un peu raison en disant que ce sont les mêmes formules car on peut associer aux deux situations les mêmes fonctions affines théoriques f, g et h définies par : $f(x) = 0{,}045x$; $g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x$; $h(x) = 18$ pour tout x (ici, x ne représente aucune grandeur particulière, c'est juste un nombre quelconque). La raison pour laquelle les résultats sur les fonctions pratiques sont similaires dans les deux exercices pratiques, c'est qu'ils se déduisent du résultat sur les fonctions théoriques correspondant. Que les grandeurs soient le temps, le poids des données, etc. ne change rien. Ce qui compte est de savoir lequel des nombres $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ est le plus grand. »

Nous ouvrons Courbes_de_fgh.ggb et demandons ce qu'on peut en déduire concernant le problème qui nous intéresse (**travail individuel très bref**). Après quelques échanges, nous disons : « Comme les fonctions f, g et h sont théoriques, on ne peut en déduire que des conjectures, par exemple $g(x) > 18$ pour $x > 675$ ou bien $f(x) < g(x)$ pour $x < 180$. Pour les démontrer, il faut basculer du côté de la théorie et voir comment ça se passe, comment on peut faire pour comparer ces nombres sans déduire le résultat d'un dessin ou d'un tableau de valeurs. On pourrait comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ en raisonnant sur des inégalités ou des inéquations, mais nous allons le faire en utilisant les résultats sur le sens de variation des fonctions affines, ce qui permettra de voir au passage des propriétés importantes. »

Le bilan est fait à partir du bilan F3 n° 3 ci-dessous.

D'après la formule $d = vt$, les distances sont : $u(t) = 0{,}045t$; $v(t) = 4{,}5 + 0{,}02t$; $w(t) = 18$ pour tout $t \geq 0$.
Ces formules ressemblent beaucoup à celles de l'exercice du téléchargement :
$a(p) = 0{,}045p$ et $b(p) = 4{,}5 + 0{,}02p$ et $c(p) = 18$ pour tout poids de données $p \geq 0$.
Les réponses à ces deux exercices pratiques sont similaires car elles se déduisent des résultats théoriques suivants.
Soit les fonctions affines théoriques f, g et h définies par $f(x) = 0{,}045x$; $g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x$; $h(x) = 18$ pour tout x. Alors :
1. $f(x) < g(x) < h(x)$ pour $x < 180$.
2. $g(x) < f(x)$ et $g(x) < h(x)$ pour $x \in]180 ; 675[$.
3. $h(x) < g(x) < f(x)$ pour $x > 675$.

Pour démontrer ces résultats, il est pratique d'avoir les courbes ci-après sous les yeux mais attention, ces courbes permettent seulement de faire des conjectures car les fonctions f, g et h sont théoriques.



SENS DE VARIATION DES FONCTIONS THÉORIQUES ET CAS PARTICULIER DES FONCTIONS AFFINES THÉORIQUES

Nous disons que nous allons commencer par chercher une condition sur p et q pour que la fonction affine théorique $f : x \longmapsto px + q$ soit croissante (respectivement décroissante). Nous projetons Fonctions_affines.ggb et faisons varier les curseurs p et q. Les conjectures apparaissent mais il faut les démontrer puisque ce sont des fonctions théoriques. Pour cela, il faudrait un moyen efficace pour démontrer qu'une fonction est croissante (respectivement décroissante).

Nous demandons aux élèves de chercher dans leur cahier de résumés les définitions de la croissance et de la décroissance d'une fonction f sur un intervalle. À partir de « $f(x)$ augmente quand x augmente », nous demandons de comparer $f(1)$ et $f(2)$… et arrivons à la caractérisation classique avec u et v, avec des inégalités larges. (Nous expliquons que seules les définitions de la croissance et de la décroissance sont au programme de seconde et que c'est pour cette raison que nous donnons la caractérisation avec les inégalités larges, les inégalités strictes correspondant à la stricte croissance et la stricte décroissance.) Nous illustrons cela à l'aide de Fonctions_affines_avec_u_et_v.ggb. Nous modifions u et v en gardant $u < v$: quand $p > 0$, les inégalités sont dans le même sens ; quand $p < 0$, ce n'est pas le cas. Enfin, nous démontrons rapidement la croissance ou la décroissance de la fonction $x \longmapsto px + q$.

Le bilan est fait à l'aide du bilan F3 n° 4 contenant le théorème sur le sens de variation des fonctions affines, ainsi que la caractérisation de la croissance ou de la décroissance d'une fonction à l'aide d'inégalités du type $f(u) \leq f(v)$. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan suivi de l'exercice des fonctions g, h.

EXERCICE DES FONCTIONS g, h

Le but de l'exercice est de comparer $g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x$ et $h(x) = 18$ pour tout x.
1. Résolvez l'équation $g(x) = 18$.
2. En utilisant le sens de variation de la fonction g, comparez $g(x)$ et 18 pour tout x.

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Nous insistons sur le fait qu'on ne doit pas déduire les résultats du dessin mais les démontrer en utilisant les résultats théoriques précédents. Les inégalités strictes peuvent être démontrées en deux temps, comme ci-dessous.

2. Comme $0{,}02 > 0$, la fonction g est croissante. Donc :
– si $x < 675$, alors $g(x) \leq g(675)$, d'où $g(x) < 18$ car $g(x) \neq 18$;
– si $x > 675$, alors $g(x) \geq g(675)$, d'où $g(x) > 18$ car $g(x) \neq 18$.

EXERCICE DES FONCTIONS F, f, g

Le but de l'exercice est de comparer $f(x) = 0{,}045x$ et $g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x$ pour tout x.
Comparer deux nombres c et d revient à étudier le signe de $d - c$.
NB : le signe d'un nombre peut être strictement positif ou bien strictement négatif ou bien nul.
On cherche donc le signe de $F(x) = g(x) - f(x)$ pour tout x.
1. Montrez que la fonction F est affine.
2. Résolvez l'équation $F(x) = 0$.
3. En utilisant le sens de variation de la fonction F, déterminez le signe de $F(x)$ pour tout x.
4. En utilisant la question 3, comparez $f(x)$ et $g(x)$ pour tout x.

Nous expliquons que les courbes permettent de conjecturer que si $x < 180$, alors $g(x) > f(x)$, etc. Mais ici encore, on doit faire une démonstration théorique. La manière de se ramener à la comparaison d'un nombre avec 0, décrite au début de l'énoncé, est héritée de Descartes ou Harriot (voir p. 180).

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Question 3. Nous faisons le schéma du bilan et montrons comment résumer les résultats dans un tableau des signes. En guise de première utilisation, nous traçons la courbe de la fonction $H : x \longmapsto 3x + 4$ à l'aide de GeoGebra et demandons de dresser le tableau des signes de la fonction H (**travail individuel très bref**).

En conclusion, nous mettons l'accent sur le fait que l'étude du sens de variation et des signes d'une fonction affine théorique peut permettre de résoudre des exercices pratiques.

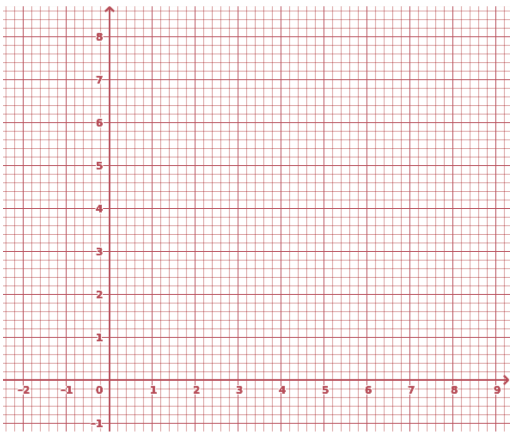
Le bilan est fait à l'aide du bilan F3 n° 5 contenant une solution de l'exercice, le tableau des signes de F et un schéma à main levée en guise d'illustration. Nous distribuons un seul document contenant ce bilan suivi de l'exercice de synthèse sur les fonctions affines.

EXERCICE DE SYNTHÈSE SUR LES FONCTIONS AFFINES

Soit m la fonction associée au programme de calcul :

```
Multiplier par 3
Retirer 8
Soustraire le résultat obtenu au double du nombre de départ
```

1. La fonction m est-elle pratique ou théorique ?
2. Quelle est l'image de $\frac{1}{3}$ par m ?
3. Démontrez que $m(x) = -x + 8$ pour tout x.
4. La fonction m est-elle affine ? Est-elle linéaire ?
5. Quel est le sens de variation de m ?
6. Dressez le tableau des signes de $m(x)$.
7. Tracez la courbe représentative de m ci-dessous.
8. (Question pour les rapides) Déterminez $m(m(m(m(1234{,}5678))))$ puis $m\left(m\left(m\left(m\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\right)\right)$.



Travail individuel pour les questions 1 et 2, puis **plénière**. Il y a différents moyens de voir que la fonction est théorique : elle ne provient pas d'un problème pratique ; les nombres de départ et leurs images doivent être infiniment précis, par exemple $m\left(\frac{1}{3}\right) \neq m(0{,}333)$. Nous précisons qu'une fonction ne peut pas être à la fois pratique et théorique.

Travail personnel avec entraide pour finir, puis **plénière**. Question 6. Les signes de $m(x)$ s'obtiennent de la même manière que ceux de $F(x)$ dans l'exercice précédent.

1. La fonction m ne provenant pas d'un problème pratique, elle est théorique.
4. $m(0) = 8 \neq 0$, donc m n'est pas linéaire.

Nous disons qu'il est fastidieux de refaire des démonstrations à chaque fois pour les signes des fonctions affines et qu'il existe un théorème. Nous demandons aux élèves quels sont les différents cas et arrivons au résultat ci-dessous. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons les résumés Fonctions linéaires et Fonctions affines.

Le bilan est fait à partir du bilan F3 n° 6 ci-dessous.

Théorème sur les signes d'une fonction affine

Soit p et q deux nombres avec $p \neq 0$. Soit $f : x \longmapsto px + q$. Soit s l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.
Suivant le signe de p, le tableau des signes de f est l'un des deux suivants.

Cas $p > 0$

x	$-\infty$		s		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Cas $p < 0$

x	$-\infty$		s		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Sens de variation et tableau des signes d'une fonction affine.

ÉTAPE 3

Fonction carré, fonctions paires, intervalles $[0\ ;+\infty[$ et $]-\infty\ ;0]$

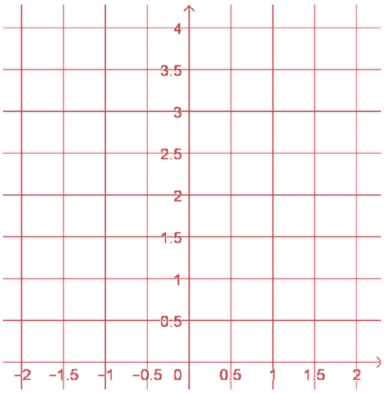
Phase d'élaboration de la fonction carré, des fonctions paires et des intervalles $[0\ ;+\infty[$ et $]-\infty\ ;0]$ | Phase d'approfondissement de la boucle pour | 1h30

EXERCICE DE LA FONCTION CARRÉ

On considère la fonction carré, notée C, définie par $C(x) = x^2$ pour tout x.
1. Remplissez le tableau suivant.

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$C(x)$									

2. Tracez ci-dessous la courbe de la fonction C sur l'intervalle [– 2 ; 2].



3. Dressez le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle [– 2 ; 2] (on demande seulement une conjecture).

x	
Variations de $C(x)$	

4. Complétez le tableau à l'aide des ensembles des solutions des équations.

Équation	$x^2 = 64$	$x^2 = -64$	$x^2 = 6$	$x^2 = 0$
Ensemble des solutions				

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Question 1. Une fois le tableau rempli, nous demandons ce qu'il a de particulier et arrivons assez rapidement à $C(-x) = C(x)$ pour tout x. Nous donnons la définition d'une fonction paire, puis demandons aux élèves de proposer une fonction paire autre que C (**travail individuel très bref**).
Question 2. Erreur classique : point anguleux à l'origine, voire ailleurs aussi ! Une fois la courbe tracée, nous disons : « Elle a une symétrie : laquelle et pourquoi ? » (**travail individuel très bref**). Le lien avec la parité de C est fait mais admis.
Question 3. Nous confirmons les conjectures correctes et annonçons qu'elles seront bientôt démontrées.
Question 4. Les solutions des équations de la forme $x^2 = k$ ont été vues en début d'année. Nous faisons le lien avec la courbe de C ainsi qu'avec la notion d'antécédent.
Ceux qui n'ont pas réussi la courbe peuvent prendre une photocopie d'une « belle courbe » sur le bureau et la coller.

La parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
C'est une conséquence du fait que pour tout x, on a : $C(-x) = C(x)$.
On dit que C est une fonction paire.

Propriété

La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Nous projetons au tableau l'exercice suivant.
1. Le point $A(50 ; 2\,500)$ est-il sur la courbe de C ?
2. Le point $B(-50 ; -2\,500)$ est-il sur la courbe de C ?
3. Soit x et y deux nombres. À quelle condition le point $M(x ; y)$ est-il sur la courbe de C ?

Travail individuel, puis en équipes, puis plénière. Question 3. Nous faisons le lien avec les équations de droites.

Équation de la parabole qui représente la fonction carré

Soit x et y deux nombres. Pour que le point $M(x ; y)$ soit sur la courbe de C, il faut et il suffit que $y = x^2$.
On dit que la parabole a pour équation $y = x^2$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

Plénière de démonstration. Nous exposons magistralement la démonstration (erronée) suivante :
Soit u et v deux nombres tels que $u \leq v$.
En multipliant $u \leq v$ par u, on obtient $u^2 \leq uv$.
En multipliant $u \leq v$ par v, on obtient $uv \leq v^2$.
On en déduit $u^2 \leq v^2$. On a donc démontré que la fonction C est croissante.
Question : Qu'en pensez-vous ?
L'erreur est mise en avant. La démonstration restant valable si $u \geq 0$ et $v \geq 0$, on a démontré que C est croissante sur $[0 ; +\infty[$, intervalle rencontré pour la première fois et dont nous donnons la définition.
Question : Corrigez le raisonnement dans le cas $u \leq 0$ et $v \leq 0$.
On obtient $u^2 \geq v^2$, ce qui prouve que C est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, intervalle que nous définissons à son tour.

La démonstration Variations de la fonction carré est collée dans le cahier de résumés.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Fonction carré.

LONGUEUR D'UN ARC DE PARABOLE

Nous projetons l'arc de la parabole de référence correspondant aux abscisses comprises entre 0 et 1 et demandons sa longueur $L(C)$ (diapositive 1). Les élèves font quelques propositions, puis nous exposons l'idée de l'approximation par des segments (diapositive 2).

Travail individuel très bref pour calculer la longueur AK, puis **plénière**. On en déduit que $L(C) > 1{,}41$.

Nous expliquons que les problèmes de détermination de longueurs de courbes (*rectification*) ou d'aires (*quadrature*) sont très anciens et populaires. Ils ont abouti par exemple aux formules $P = 2\pi R$ et $A = \pi R^2$. Celui de la quadrature du cercle est célèbre. La méthode utilisée ici est attribuée à Eudoxe de Cnide (v. –395-v. –342) (diapositives 3 et 4). Elle a été popularisée par Archimède (–287-–212) et enfin théorisée par Camille Jordan (1838-1922). Dans la troisième proposition de son traité *De la mesure du cercle*, en approchant le cercle par des polygones réguliers à 96 côtés, Archimède obtient $\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$. Nous demandons aux élèves s'ils pensent que c'est un bon encadrement (**travail individuel très bref**). Les élèves déterminent des valeurs approchées décimales de $\frac{223}{71}$ et de $\frac{22}{7}$.

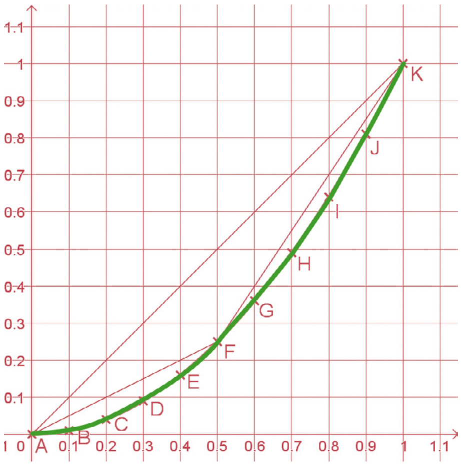
Selon Plutarque (v. 46-125), un soldat romain croisa Archimède traçant des figures géométriques au sol, inconscient de la prise de la ville par l'ennemi. Troublé dans sa concentration par le soldat, Archimède lança : « Ne dérange pas mes cercles ! ». Le soldat, vexé de ne pas voir le vieillard de 75 ans obtempérer, le tua d'un coup d'épée (diapositive 5).

Environ 21 siècles plus tard, dans son *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, Camille Jordan approche la longueur d'une courbe par la somme des longueurs de segments de plus en plus petits (diapositives 6 et 7).

EXERCICE DES LONGUEURS APPROCHÉES

Soit (C) la courbe d'équation $y = x^2$ pour $0 \leq x \leq 1$.
Soit $L(C)$ sa longueur.
Soit $A, B, \ldots, K$ les points d'abscisses 0 ; 0,1 ; ... ; 1 de (C).
On a démontré que $AK = \sqrt{2}$. Donc $L(C) > 1{,}41$.
1. Calculez la longueur $AF + FK$. Que peut-on en déduire pour $L(C)$?

2. D'après la figure ci-dessous, on a : $L(C) \simeq AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JK$



Pour obtenir une valeur approchée de cette somme, on utilise un programme Python. On commence par écrire une fonction Python qui retourne une valeur approchée de la distance entre deux points M et N quand on donne comme arguments les coordonnées de M et N. Cette fonction, que l'on peut baptiser `dMN`, doit utiliser la fonction Python `sqrt` qui retourne une valeur approchée de la racine carrée de son argument. La fonction `sqrt` se trouve dans la bibliothèque `math`. De plus, le carré d'un nombre a se code `a**2`.
Complétez la définition suivante :

```
from math import sqrt
def dMN(xM, yM, xN, yN):
  return .....................................
```

3. On définit maintenant une fonction qui retourne une valeur approchée de la longueur du segment joignant les points d'abscisses a et b de la courbe (C) où a et b sont les arguments de la fonction.
Complétez la définition suivante :

```
def L(a, b):
  return .....................................
```

4. Écrivez un programme Python qui affiche une bonne valeur approchée de la longueur $L(C)$.
Testez-le sur Brython.info, recopiez-le sur votre cahier de recherche et notez le résultat.

Travail individuel pour les questions 1, 2 et 3, puis **en équipes**. Ceux qui ont terminé poursuivent.

Plénière. C'est la première fois que les élèves rencontrent des fonctions Python avec plusieurs arguments autres que la fonction `print`. Ces fonctions sont testées à l'aide de Longueur_approchée_d'une_courbe.py.

Travail individuel pour la question 4, puis **en équipes** puis **plénière** : des propositions sont écrites à la fin du fichier précédent et testées.
Si personne ne l'a fait, nous proposons un programme avec une boucle *pour* :

```
s = 0
  for i in range(0,10):
    s = s + longueur_segment(i/10, (i+1)/10)
  print(s)
```

1. $AF + FK = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}25^2} + \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}75^2} \simeq 1{,}4604\ldots$ Donc $L(C) > 1{,}46$.
2 et 3. *Les élèves écrivent* `sqrt((xN-xM)**2+(yN-yM)**2)` *et* `dMN(a, a**2, b, b**2)` *sur l'énoncé.*
4. *Un ou deux programmes qui fonctionnent, dont un avec une boucle for, accompagnés du texte :* $L(C) \simeq 1{,}4781974$.

ÉTAPE 4

Fonction cube, fonctions impaires

Phase d'élaboration | 25 minutes

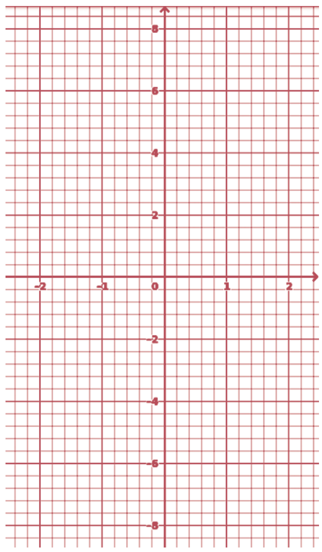
Nous revenons sur l'exercice des boites cubiques (p. 236) à l'aide de Aquariums.ggb. Les élèves rappellent ce qui a été fait, notamment à quoi correspondent les points *A* et *B*. Nous redemandons comment obtenir un aquarium de 2 litres, c'est-à-dire de 2 000 cm³. Le lien avec l'équation $x^3 = 2\,000$ est fait.

EXERCICE DE LA FONCTION CUBE

On considère la fonction cube, notée T, définie par $T(x) = x^3$ pour tout x.

1. Sans calculatrice, complétez le tableau suivant.

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$T(x)$					0	0,125	1	3,375	8



2. Tracez ci-contre la courbe de la fonction T sur l'intervalle [– 2 ; 2].
3. Complétez le tableau de variations de la fonction T sur l'intervalle [– 2 ; 2] (on demande seulement une conjecture).

x	
Variations de $T(x)$	

4. Donnez une équation de la courbe représentative de la fonction T.

Nous procédons à peu près de la même manière que pour la fonction carré. La symétrie de la courbe est une conséquence de la relation $T(-x) = -T(x)$ établie au début. Une fois la définition d'une fonction impaire donnée, nous demandons s'il existe des fonctions affines impaires, des fonctions affines paires (**travail individuel très bref**).

Nous demandons quel est le sens de variation de T, puis pourquoi ? Certains se contentent encore de lire sur la courbe… La croissance de T est admise.

La courbe de T est symétrique par rapport à l'origine. C'est une conséquence du fait que pour tout x, on a : $T(-x) = -T(x)$. On dit que T est une fonction impaire.

Propriété
La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

ÉQUATION $x^3 = k$

Nous demandons quelles sont les solutions de l'équation $x^3 = 8$. D'après la courbe, il semble que 2 soit le seul antécédent de 8 par T, donc la seule solution, ce que nous confirmons. Nous disons : « Pour tout k, l'équation $x^3 = k$ a une seule solution, ce que nous admettons. Cette solution est appelée racine cubique de k. »

Travail individuel pour trouver une valeur approchée décimale à 0,01 près de la seule solution de l'équation $x^3 = 6$.

Plénière. Un élève qui a tabulé avec sa calculatrice montre ce qu'il a fait sous la caméra.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Fonction cube.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous demandons aux élèves une valeur décimale exacte ou approchée de solutions d'équations du type $x^3 = -1$; $x^3 = 64$; $x^3 = -27$; $x^3 = 100$.

ÉTAPE 5

Fonction inverse, autres intervalles de $\mathbb{R}$

`Phase d'élaboration | ⏱ 45 minutes`

EXERCICE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM

Voici un programme de calcul :

```
Mettre au carré
Ajouter 1
Diviser par le nombre de départ
Retirer le nombre de départ
```

1. Avec un nombre de départ strictement positif, quel est le plus petit nombre que l'on puisse obtenir ?
2. Même question pour le plus grand nombre.

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Des résultats sont consignés au tableau que nous écrivons sous la forme : $1 \mapsto 1$; $2 \mapsto 0{,}5$; $100 \mapsto 0{,}01$, etc. Nous projetons le cahier de recherche d'un élève qui a démontré que le résultat est l'inverse du nombre de départ. Finalement, les réponses aux deux questions émergent.

Avec x comme nombre de départ, le résultat est l'inverse de x car : $\frac{x^2+1}{x} - x = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} - x = x + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a ni minimum ni maximum sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Les questions n'ont pas de réponses !

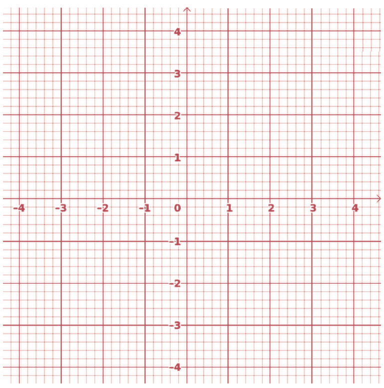
EXERCICE DE LA FONCTION INVERSE

On considère la fonction inverse, notée I, définie par $I(x) = \frac{1}{x}$.

1. Remplissez le tableau suivant.

x	-4	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	1	4
$I(x)$									

2. Tracez la courbe de la fonction I.



3. Complétez le tableau de variations de la fonction I (on demande seulement une conjecture).

x	
Variations de $I(x)$	

4. À quelle condition un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est-il sur la courbe représentative de I ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Nous disons que la fonction I est définie sur la réunion des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$, intervalles que nous définissons. Nous parlons de la valeur interdite 0 et de la convention des deux traits verticaux dans le tableau de variations, des branches d'hyperbole, du lien entre la courbe et l'exercice précédent. Nous faisons également le lien avec l'exercice de la concentration en sucre (p. 234) en projetant Sucre.ggb.

Travail individuel très bref pour déterminer si la fonction I est paire (respectivement impaire). Le lien avec la symétrie de la courbe par rapport à l'origine est fait.

Nous donnons rapidement les notations des différents types d'intervalle de $\mathbb{R}$ en les représentant par des parties de la droite numérique. Avant de distribuer le résumé, nous demandons de traduire, par des inégalités, des conditions du genre $x \in\ ]-4\ ;\ 4[$. Nous posons également des questions du genre « $\pi \in\ ]-\infty\ ;\ 3{,}14]$? ».

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

Plénière de démonstration

Question : La fonction I est-elle décroissante ?

On commence par le sens de variation sur $]0\ ;\ +\infty[$. Soit u et v deux nombres tels que $0 < u < v$.

Question : Mettre $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ au même dénominateur.

Question : En déduire le signe de $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$

On en déduit que $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$, donc que la fonction I est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Question : Quel est le signe de $\frac{v-u}{uv}$ dans le cas $u < v < 0$?

On en déduit que la fonction I est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

La démonstration Variations de la fonction inverse est collée dans le cahier de résumés.

ÉQUATION $\frac{1}{x} = k$

Travail individuel pour résoudre l'équation $\frac{1}{x} = 2$, puis **plénière**. Des élèves disent que 0,5 est la seule solution, ce qui semble confirmé par la courbe, mais ils ne savent pas le démontrer. Flavie propose de le démontrer en multipliant par x les deux membres, sans précaution. Nous disons : « On obtient une équation équivalente en multipliant les deux membres par un nombre *non nul*. Or ici, 0 n'étant pas solution, on peut se limiter à la recherche de x non nul tel que $\frac{1}{x} = 2$, donc on obtient une équation équivalente en multipliant par x. Ta méthode est bonne, Flavie, mais sur une copie il faut expliquer pourquoi on obtient une équation équivalente en multipliant par x. » Nous recommençons avec des grandes (respectivement petites) valeurs de k positives : le lien avec l'exercice du maximum et du minimum émerge.

Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons les résumés Intervalles de $\mathbb{R}$, Fonction inverse et les parties III et IV du résumé Fonctions : autres généralités.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous proposons des résolutions d'équations du type $\frac{1}{x} = -1$; $\frac{1}{x} = 0$; $\frac{1}{x} = 0{,}25$.

ÉTAPE 6

Fonction racine carrée

Phase d'élaboration | 45 minutes

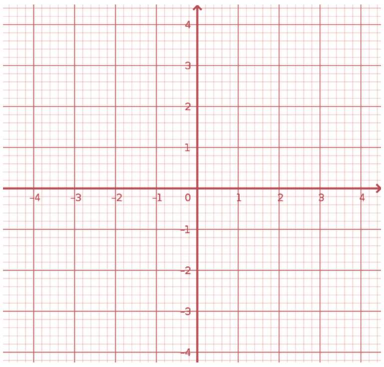
EXERCICE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

On considère la fonction racine carrée, notée R, définie par $R(x) = \sqrt{x}$.

1. Remplissez le tableau suivant.

x	– 4	– 1	– 0,25	0	0,25	1	4
$R(x)$							

2. Tracez la courbe de la fonction R.



3. Complétez le tableau de variations de la fonction R (on demande seulement une conjecture).

x	
Variations de $R(x)$	

4. À quelle condition un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est-il sur la courbe représentative de R ?

Travail à la maison, puis en équipes, puis plénière. Le tracé au voisinage de l'origine pose problème pour beaucoup d'élèves.

Travail individuel très bref pour déterminer si la fonction R est paire (respectivement impaire).

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

Plénière de démonstration. Soient u et v deux nombres positifs ou nuls tels que $u \leq v$.
Question : Développez $\left(\sqrt{v} - \sqrt{u}\right)\left(\sqrt{v} + \sqrt{u}\right)$ en utilisant une identité remarquable.
Question : En déduire le signe de $\sqrt{v} - \sqrt{u}$.
Le résultat s'obtient à l'aide de la règle des signes pour le cas $u \neq v$.

La démonstration Variations de la fonction racine carrée est collée dans le cahier de résumés.

ÉQUATION $\sqrt{x} = k$

Travail individuel pour résoudre l'équation $\sqrt{x} = 81$, puis **plénière**. On admet que pour tout $k \geq 0$, l'équation $\sqrt{x} = k$ admet une seule solution. Ici, c'est 81^2. Quand nous jugerons le moment opportun, nous distribuerons le résumé Fonction racine carrée.

AUTOMATISATION DANS LA DURÉE

Nous demandons aux élèves de résoudre des équations du type $\sqrt{x} = 4$; $\sqrt{x} = -9$; $\sqrt{x} = 0$.

EXERCICE DES LONGUEURS APPROCHÉES (SUITE)

Le programme suivant affiche une bonne valeur approchée de la longueur $L(C)$ de la courbe (C) d'équation $y = x^2$ pour $0 \leq x \leq 1$.

```
from math import sqrt

def dMN(xM,yM,xN,yN):
  return sqrt((xN-xM)**2+(yN-yM)**2)

def L(a,b):
  return dMN(a,a**2,b,b**2)

s = 0
for i in range(0,10):
  s = s + L(i/10,(i+1)/10)
print(s)
```

Soit (R) la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 1$.
1. Modifiez la définition de la fonction L pour que le programme affiche une bonne valeur approchée de la longueur $L(R)$ de (R).
2. Modifiez la boucle en fin de programme pour que le programme affiche une meilleure valeur approchée de la longueur $L(R)$.
3. Éditez le programme modifié, exécutez-le et notez le résultat affiché. Que pensez-vous de ce résultat ?
4. Défi : Écrivez une fonction qui prend en argument le nombre de segments qui approchent (R) et qui renvoie la valeur approchée correspondante de $L(R)$. Envoyez-moi le code de cette fonction par courriel.

Travail à la maison, puis plénière. Question 2. On dirait que c'est la même longueur que pour la fonction carré ! La symétrie entre les deux courbes émerge. Donc la courbe de la fonction racine est une demi-parabole. Nous traçons sur GeoGebra la courbe de $x \longmapsto x^2$ pour $x > 0$ et la symétrisons par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Question 3. Les résultats des différents programmes sont comparés.
Question 4. Nous montrons le travail envoyé par un élève.

1. On remplace `a**2` et `b**2` par `sqrt(a)` et `sqrt(b)`.
2. On peut remplacer 10 par 100 (trois fois).
3. On trouve 1,4781974 environ. Apparemment (C) et (R) ont la même longueur. C'est bien le cas car on peut démontrer qu'elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

ÉTAPE 7

Comparaison des fonctions de référence, entraînement

Phase d'élaboration | Phase de prise en main des propriétés des fonctions de référence | ⏱ 1 heure

POSITION RELATIVE DES COURBES D'ÉQUATIONS $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, POUR $x \geq 0$

Plénière de démonstration. Nous ouvrons Trois_courbes.ggb et disons : « Voici les courbes représentatives de trois fonctions de référence sur $[0 ; +\infty[$. »
Question : Quelles sont ces fonctions ?
Les élèves devinent que la courbe verte est celle de $x \longmapsto x$ et que les deux autres sont celles de $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^3$ mais ils ne savent pas encore à quelles fonctions correspondent la bleue et la rouge. Puis nous expliquons ce que signifie *étudier la position relative de deux ou plusieurs courbes* (voir le fichier de la démonstration en ligne).
Question : Pour étudier la position sur $[0 ; 1]$, comparez x, x^2 et x^3 pour x dans $[0 ; 1]$.
On part de $x \leq 1$ puis on multiplie par x puis par x^2 qui sont positifs ou nuls. Le lien avec les courbes projetées est fait.
Question : Pour étudier la position sur $[1 ; +\infty[$, comparez x, x^2 et x^3 pour x dans $[1 ; +\infty[$.
Pour conclure, nous ouvrons la fenêtre Algèbre de Trois_courbes.ggb.

La démonstration Position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ est collée dans le cahier de résumés.

JEU DE CARTES AUTOUR DE SIX FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Ces fonctions ont pour expression analytique $-3x + 4$; $\frac{x}{3} - 2$; x^2 ; x^3 ; $\frac{1}{x}$; $\sqrt{x}$.

Nous disons : « Le jeu est composé de 32 cartes réparties en 6 familles de 5 cartes de couleurs différentes – une famille pour chaque fonction de référence – auxquelles viennent s'ajouter 2 cartes intruses. La famille d'une fonction f est composée de son expression analytique, sa courbe, son tableau de variations, l'ensemble des solutions d'une équation du type $f(x) = k$ et l'ensemble des solutions d'une inéquation faisant intervenir $f(x)$. La première carte intruse est du type équation, l'autre du type inéquation. Chaque équipe doit reconstituer les six familles et trouver les deux intrus. Chaque carte associée à la bonne expression rapporte 1 point, chaque intrus 3 points. Ni la calculatrice ni les cahiers ne sont autorisés. Il s'agit de votre première rencontre avec des inéquations du type $f(x) < k$ pour des fonctions théoriques non affines, mais vous pourrez vous débrouiller car vous en avez rencontré pour des fonctions pratiques et des fonctions affines théoriques ! Nous retravaillerons ces inéquations dans la séquence sur les inéquations. »

Nous avons photocopié un jeu complet par équipe (dossier Jeu des six familles), chaque type de carte sur un papier de couleur différente : les expressions analytiques sur du bleu, les courbes sur du rose, etc. Chaque équipe reçoit un jeu complet dans une enveloppe et se répartit équitablement les 26 cartes non bleues. Seules des feuilles de brouillon sont autorisées. Les expressions des fonctions et les règles du jeu sont projetées.

Travail individuel. Chacun essaye d'associer ses propres cartes (non bleues) aux fonctions de référence qui figurent au tableau. Nous rappelons aux élèves que le respect du travail individuel permettra d'être plus efficace ensuite.

Travail en équipes. Chacun fait part de ses résultats aux autres membres de l'équipe qui réagissent. Nous aidons les équipes à ne laisser personne sur le côté et observons les élèves de manière à pouvoir faire émerger en plénière des raisonnements ou des calculs intéressants.

Plénière. Un élève passe les réponses en revue une par une à l'aide du diaporama (diapositives 8 à 14). Les points de chaque équipe pour chaque carte bleue sont notés par un autre élève sur un tableau à double entrée. L'essentiel du débat porte sur les équations et les inéquations ; leurs solutions sont illustrées à l'aide de la courbe projetée. Les intrus sont dévoilés à la fin, ce qui ménage le suspense.

ENSEMBLES

Complément concernant les ensembles

Comme pour l'algorithmique et la programmation, l'expérience nous a montré qu'un apprentissage trop clairsemé de la notion d'ensemble ne permettait pas à de nombreux élèves d'élaborer correctement cette notion. À l'inverse, étudier d'emblée tous les types d'ensembles du programme de seconde dans une séquence dédiée présenterait l'inconvénient majeur de les présenter aux élèves sans qu'ils sachent comment ils interviennent par ailleurs. Le programme indique comment éviter ces deux écueils. La section « Vocabulaire ensembliste et logique » commence par : « L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils [*sic*] se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation[18]. »

Nous commençons donc par introduire les différents types d'ensembles dans des séquences où ils se présentent naturellement :
– ensembles de points d'un plan et notion d'élément lors du premier travail sur les équations de droites dans l'étape 3 de G2 (voir p. 131) ;
– intervalles [a ; b] lorsqu'il s'agit de décrire les variations d'une fonction pratique dans F1 (voir p. 217) ;
– ensembles finis de nombres et ensemble vide en lien avec les résolutions graphiques d'équations dans F1 (voir p. 220) ;
– ensembles finis d'issues d'une expérience aléatoire dans P1 (voir p. 83).

Une fois P1 terminée, nous reprenons ces notions dans la séquence « Ensembles » (non traitée dans cet ouvrage), dans laquelle nous présentons les ensembles de nombres ainsi que les notions de sous-ensemble, d'inclusion, de complémentaire, d'intersection et de réunion.

Les intervalles non compacts sont introduits lors de l'étude des fonctions de référence dans F3 et réutilisés pour décrire l'ensemble des solutions d'une inéquation.

18 *Bulletin officiel* spécial n° 1 du 22 janvier 2019.

ACCÈS AUX CONTENUS EN LIGNE :

Pour aller plus loin, les auteurs proposent d'importants contenus associés à l'ouvrage :
- l'ensemble des documents des séquences (diaporamas, feuilles de calcul, fichiers GeoGebra et Python, démonstrations, résumés et bilans) ;
- des défis pour les débuts de séance ;
- les énoncés des exercices projetés et distribués ;
- des exercices supplémentaires pour les élèves rapides ainsi que des exercices de prise en main et d'approfondissement.

Pour les consulter :

1. Rendez-vous sur reseau-canope.fr/code
2. Créez votre compte ou connectez-vous à l'aide de vos identifiants.
3. Renseignez le code d'accès fourni ci-dessous.
4. Rendez-vous sur votre compte, rubrique « Ma bibliothèque » pour consulter les contenus complémentaires.

Aide et conseils : reseau-canope.fr/contact

Code d'accès : DMEC-290819

SUR LA MÊME THÉMATIQUE

Statistiques et probabilités. De la sixième à la terminale
Christophe Roland (coord.), François Capy et Michel Gouy (dir.)
2015
Livre : Réf. 590B2981
PDF : Réf. 590N0006
Voir la notice en ligne

Le rallye mathématique dans la classe. Un jeu très sérieux !
Gilles Aldon (coord.)
2018
Livre : Réf. W0003716
PDF : Réf. W0003802
Voir la notice en ligne

Bien débuter en lycée. Repères et clés pour l'enseignant
Anne Pédron
2019
Livre : Réf. W0017728
PDF : Réf. W0017894
Voir la notice en ligne

AGIR
POUR VOUS
ACCOMPAGNER
AU QUOTIDIEN

Comment proposer des exercices intéressants, faciliter la différenciation, et permettre à chaque élève de progresser et de prendre plaisir aux apprentissages ? Les auteurs de cet ouvrage, destiné aux enseignants de seconde générale et technologique, ont souhaité partager et décrire le quotidien de leur pratique dans le moindre détail.

– La première partie s'attache à la mise en œuvre de cette différenciation : préparation des séquences et des séances, mise en place du travail en équipes, bilans en plénière, utilisation des cahiers et des outils…
– La seconde partie contient 16 séquences détaillées et testées en classe, dans lesquelles le lecteur puisera suivant le degré d'appropriation voulu. La progression proposée couvre une grande partie des nouveaux programmes à travers des temps de réflexion individuels, de concertation en équipes, et des exercices adaptés en classe et à la maison.

L'ensemble des documents des séquences, les énoncés des exercices, les fichiers GeoGebra, Python, les bilans, ainsi que des exercices supplémentaires pour les élèves rapides et des exercices d'approfondissement sont disponibles en téléchargement.

Jean-Philippe Rouquès est professeur de mathématiques dans le secondaire. Il a coécrit les trois premiers volumes de la série *Des maths ensemble et pour chacun* (6e, 5e, 4e).
Laetitia Valade est professeure de mathématiques dans le secondaire.
Christophe Gragnic enseigne les mathématiques, l'algorithmique et la programmation en lycée et en STS. Il a créé le langage de programmation MicroAlg et le Club des expressions (système informatique pour travailler sur la structure des expressions algébriques).

Cet ouvrage existe en version imprimée.

CONTENUS
COMPLÉMENTAIRES
EN LIGNE

CANOPÉ ÉDITIONS
AGIR

ISSN 2425-9861
ISBN 978-2-240-04443-3
Réf. W0019864